TEORI ANTRIAN

2.1. Konsep Dasar Teori Antrian

Menurut Kakiay (2004), proses antrian dimulai saat pelanggan-pelanggan yang memerlukan pelayanan mulai datang. Mereka berasal dari suatu populasi yang disebut sebagai sumber masukan. Proses antrian sendiri merupakan suatu proses yang berhubungan dengan kedatangan pelanggan pada suatu fasilitas pelayanan, menunggu dalam baris antrian jika belum dapat dilayani, dilayani dan akhirnya meninggalkan fasilitas tersebut sesudah dilayani.

Sebuah sistem antrian adalah suatu himpunan pelanggan, pelayan dan suatu aturan yang mengatur pelayanan kepada pelanggan. Sedangkan keadaan sistem menunjuk pada jumlah pelanggan yang berada dalam suatu fasilitas pelayanan, termasuk dalam antriannya. Salah satu populasi adalah jumlah pelanggan yang datang pada fasilitas pelayanan. Besarnya populasi merupakan jumlah pelanggan yang memerlukan pelayanan.

Dalam proses antrian, banyaknya populasi dibedakan menjadi dua, yaitu populasi terbatas *(finite)* dan populasi tidak terbatas *(infinite)*. Populasi yang terbatas dapat ditemukan pada suatu perusahaan yang mempunyai sejumlah mesin yang memerlukan perawatan atau perbaikan pada periode tertentu. Populasi yang tidak terbatas merupakan pelanggan yang tidak terhingga yang contohnya dapat dilihat pada suatu supermarket, yang setiap hari melayani pelanggan yang datang secara random dan tidak dapat ditentukan berapa jumlahnya. Karena jumlah yang datang di supermarket tidak dapat ditentukan dengan pasti, yang karena sifatnya yang demikian kemudian disebut populasi yang tidak terbatas.

2.2. Faktor Sistem Antrian

Terdapat beberapa faktor penting yang terkait erat dengan sistem antrian. Faktor-faktor yang berpengaruh terhadap barisan antrian dan pelayanannya adalah sebagai berikut (Kakiay, 2004):

1. Distribusi kedatangan
2. Distribusi Waktu pelayanan
3. Fasilitas pelayanan
4. Disiplin pelayanan
5. Ukuran sistem antrian
6. Sumber pemanggilan

2.2.1 Distribusi Kedatangan

Pola kedatangan para pelanggan biasanya dicirikan oleh waktu antar-kedatangan, yaitu waktu antara kedatangan dua pelanggan yang berurutan pada suatu fasilitas pelayanan. Pola ini dapat bergantung pada jumlah pelanggan yang berada dalam sistem, ataupun tidak bergantung pada keadaan sistem antrian ini (Bronson, R. 1991).

Bila bentuk kedatangan ini tidak disebut secara khusus, maka dianggap bahwa pelanggan tiba satu persatu. Asumsinya adalah kedatangan pelanggan mengikuti suatu proses dengan distribusi probabilitas tertentu. Distribusi probabilitas yang sering digunakan adalah distribusi Poisson, dimana kedatangan bersifat bebas, tidak terpengaruh oleh kedatangan sebelum ataupun sesudahnya.

Asumsi distribusi Poisson menunjuk bahwa kedatangan pelanggan sifatnya acak dan mempunyai rata-rata kedatangan sebesar *lamda* (λ). Bila kedatangan individu-individu mengikuti suatu distribusi Poisson, maka waktu antar kedatangan atau *interarrival time* (yaitu waktu antara kedatangan setiap individu) adalah random dan mengikuti suatu distribusi Eksponensial *(Kakiay, T.J. 2004).*

Distribusi kedatangan dibagi menjadi dua, yaitu :

a. Kedatangan secara individu (tunggal = *single arrivals*).

b. Kedatangan secara kelompok (*bulk arrivals*).

2.2.2 Distribusi Waktu Pelayanan

Pola pelayanan biasanya dicirikan oleh waktu pelayanan (*service time*), yaitu waktu yang dibutuhkan seorang pelayan untuk melayani seorang pelanggan. Waktu pelayanan dapat bersifat deterministik, atau berupa suatu variabel acak yang distribusi probabilitasnya dianggap telah diketahui. Besaran ini dapat bergantung pada jumlah pelanggan yang telah berada di dalam fasilitas pelayanan, atau tidak bergantung pada keadaannya. Perlu diperhatikan apakah seorang pelanggan hanya dilayani oleh satu pelayan atau suatu pelangan ini membutuhkan suatu barisan pelayan. Bila tidak disebutkan secara khusus, maka anggapan dasarnya adalah bahwa satu pelayan saja dalam melayani secara tuntas urusan seorang palanggan (*Bronson, R. 1991*).

Menurut Kakiay (2004), pola pelayanan berkaitan dengan berapa banyak fasilitas pelayanan yang dapat disediakan. Pola pelayanan terbagi dalam dua komponen penting, yaitu :

a. Pelayanan secara individual (*single service*).

b. Pelayanan secara kolompok (*bulk service*).

2.2.3 Fasilitas Pelayanan

Fasilitas pelayanan berkaitan erat dengan baris antrian yang akan dibentuk. Fasilitas pelayanan ini terbagi dalam tiga bentuk, yaitu *(Kakiay. 2004)* :

a. Bentuk series, yaitu pelayanan yang berada dalam satu garis lurus ataupun garis melingkar.
b. Bentuk paralel, yaitu pelayanan yang berada dalam beberapa garis lurus di mana antara garis yang satu dengan yang lain berbentuk paralel.
c. Bentuk *network station*, yaitu pelayanan yang dapat didesain secara series dengan pelayanan lebih dari satu pada setiap stasiun. Bentuk ini juga dapat dilakukan secara paralel dengan stasiun yang berbeda-beda.

2.2.4 Disiplin Pelayanan

Disiplin antrian adalah aturan di mana para pelanggan dilayani atau disiplin pelayanan (*service discipline*) yang memuat urutan (*order*) para pelanggan menerima layanan. Aturan pelayanan menurut urutan kedatangan ini dapat didasarkan pada *(Kakiay, T.J. 2004)* :

1. Pertama Masuk Pertama Keluar (FIFO)

   FIFO (*First In First Out*) merupakan suatu peraturan dimana yang akan dilayani terlebih dahulu adalah pelanggan yang datang terlebih dahulu. FIFO ini sering juga disebut FCFS (*First Come First Served*)
2. Yang Terakhir Masuk Pertama Keluar (LIFO)

LIFO (*Last In First Out*) merupakan antrian dimana yang datang paling akhir adalah yang dilayani paling awal. LIFO ini sering juga disebut LCFS (*Last Come First Served*)

3. Pelayanan dalam Urutan Acak (SIRO)

   SIRO (*Service In Random Order*) dimana pelayanan dilakukan secara acak. SIRO ini sering juga disebut RSS (*Random Selection For Service*)

4. Pelayanan Berdasarkan Prioritas (PRI)

   Merupakan suatu peraturan dimana pelayanan didasarkan pada prioritas khusus.

2.3.5 Ukuran dalam Antrian

Besarnya antrian pelanggan yang akan memasuki fasilitas pelayanan pun perlu diperhatikan. Ada dua desain yang dapat dipilih untuk menentukan besarnya antrian, yaitu *(Kakiay, T.J. 2004)* :

1. Ukuran kedatangan secara tidak terbatas (*infinite queue*).
2. Ukuran kedatangan secara terbatas (*finite queue*).

2.3.6 Sumber Pemanggilan

Suatu karakteristik yang perlu diketahui dari sumber pemanggilan ini adalah ukurannya (jumlahnya), yaitu jumlah total unit yang memerlukan pelayanan dari waktu ke waktu atau disebut jumlah total pelanggan potensial. Ini bisa dianggap terbatas ataupun tidak terbatas *(Kakiay, T.J. 2004).*

2.4. Notasi Model Antrian

Notasi yang sesuai untuk meringkaskan karakteristik utama dari antrian parallel, secara universal dibakukan dalam format berikut ini (Taha, 1996):

(a/b/c/) : (d/e/f)

dengan simbol-simbol *a, b, c, d, e, dan f* adalah unsur-unsur dasar dari model ini sebagai berikut :

a = distribusi kedatangan

b = distribusi waktu pelayanan (atau keberangkatan)

c = jumlah pelayan paralel ($c = 1, 2, \dots \infty$)

d = peraturan pelayanan (misalnya FCFS, LCFS, SIRO)

e = jumlah maksimum yang diijinkan masuk dalam sistem (dalam antrian + dalam pelayanan)

f = ukuran sumber pemanggilan

Menurut Kakiay (2004), notasi standar ini dapat diganti dengan kode-kode yang sebenarnya dari distribusi-distribusi yang terjadi dan bentuk lainnya, seperti:

M = distribusi kedatangan atau keberangkatan dari proses Poisson. Dapat juga distribusi tiba dan bertolak dari distribusi eksponensial.

D = konstanta atau *deterministik inter arrival* atau *service time* (waktu pelayanan)

c = jumlah pelayan dalam bentuk paralel atau seri

N = jumlah maksimum pelanggan *(customer)* dalam sistem

E_d = Erlang atau Gamma distribusi untuk waktu antar kedatangan atau waktu pelayanan dengan parameter = *d*

G = diatribusi umum dari *service time* atau keberangkatan *(departure)*

GI = distribusi umum yang independen dari proses kedatangan *(Interactive Time)*

GD = *General Discipline* (disiplin umum) dalam antrian (FCFS, LCFS, SIRO)

NPD = *Non Preemptive Discipline*

PD = *Preemptive Discipline*

Contoh dari kode ini adalah sebagai berikut :

1. (M/M/1) : (GD/∞/∞)

   M : waktu antar kedatangan dan waktu pelayanan mengikuti distribusi Poisson atau Eksponensial

   c : jumlah pelayan adalah satu

   GD : General Dicipline mengikuti FCFS, LCFS, SIRO, PRI.

   ∞ : jumlah pelanggan yang dapat masuk dalam sistem dan datang berasal dari populasi yang tak terbatas.

2. (M/M/c) : (GD/∞/∞)

   M : waktu antar kedatangan dan waktu pelayanan mengikuti distribusi Poisson atau Eksponensial

   c : jumlah pelayan adalah c pelayan

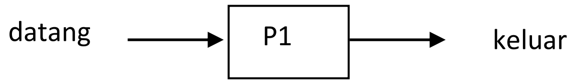
   GD : General Dicipline mengikuti FCFS, LCFS, SIRO, PRI.

   ∞ : jumlah pelanggan yang dapat masuk dalam sistem dan datang berasal dari populasi yang tak terbatas.

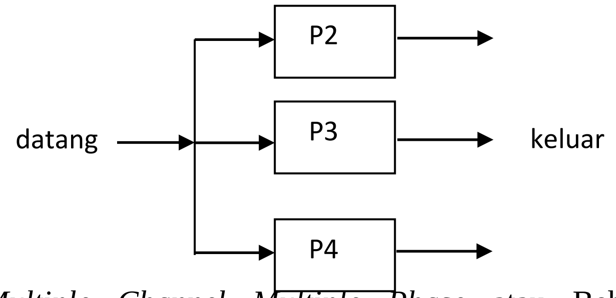
2.5. Sistem Antrian

Menurut Kakiay (2004), Skema beberapa sistem antrian yaitu:

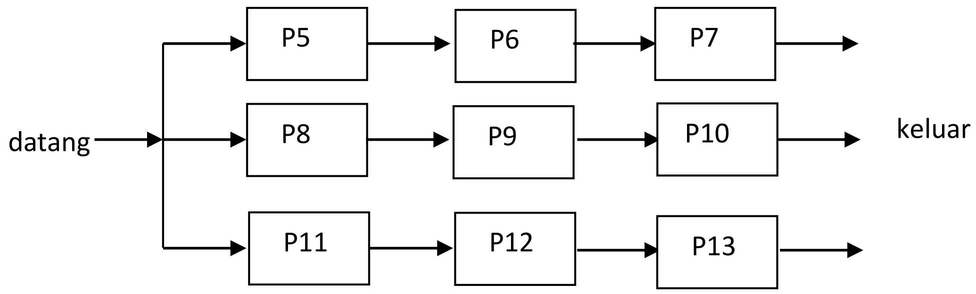
1. *Single Channel Single Phase* atau Satu Antrian Satu Pelayanan.



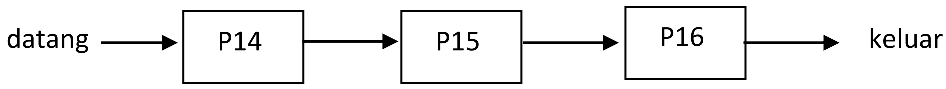
2. *Multiple Channel Single Phase* atau Satu Antrian Beberapa Pelayanan Single



3. *Multiple Channel Multiple Phase* atau Beberapa Antrian Beberapa Pelayanan Paralel.



4. *Single Multiple Phase* atau Satu antrian beberapa pelayanan seri.



Keterangan: P1, P2, P3, …, P16 adalah pelayan 1, pelayan 2, sampai dengan pelayan 16.

2.6. Ukuran *Steady-State*

Setelah probabilitas *steady-state* dari p_n untuk n pelanggan dalam sistem ditentukan yaitu $\lambda < \mu$ atau $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$ di mana ρ adalah probabilitas dari sistem pelayanan, λ adalah rata-rata kedatangan dan μ adalah rata-rata pelayanan, dapat dihitung ukuran-ukuran *steady-state* dari kinerja dari situasi antrian tersebut dengan cara yang sederhana. Ukuran-ukuran kinerja seperti ini lalu dapat dipergunakan untuk menganalisis operasi situasi antrian tersebut untuk maksud pembuatan rekomendasi tentang rancangan sistem tersebut. Ukuran-ukuran kinerja yang terpenting adalah jumlah pelanggan yang menunggu yang diperkirakan, waktu menunggu per pelanggan yang diperkirakan, dan pemanfaatan sarana pelayanan yang diperkirakan (*Taha. 1996*).

Didefinisikan :

Ls = jumlah pelanggan yang diperkirakan dalam sistem

Lq = jumlah pelanggan yang diperkirakan dalam antrian

Ws = waktu menunggu yang diperkirakan dalam sistem

Wq = waktu menunggu yang dperkirakan dalam antrian

Di mana rumus umum dari L_s, L_q, W_s, W_q adalah :

$$L_s = \sum_{n=0}^{\infty} np_n$$

$$L_q = \sum_{n=c+1}^{\infty} (n-c)p_n$$

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda_{eff}}$$

$$W_q = W_s - \frac{1}{\mu}$$

Di mana

p_n : Probabilitas steady-state dari *n* pelanggan dalam sistem, sebagai fungsi dari λ_n dan μ_n. Secara umum dapat dihitung dengan rumus :

$$p_n = \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\ldots\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\ldots\mu_1} p_0, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

λ_{eff} : Laju kedatangan rata-rata efektif yang tidak bergantung pada jumlah dalam sistem n. Nilai λ_{eff} dapat dihitung dengan rumus :

$$\lambda_{eff} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n p_n$$

Pemanfaatan yang diperkirakan dari sebuah sarana pelayanan didefinisikan sebagai fungsi dari jumlah rata-rata pelayan yang sibuk.

Karena selisih antara L_s dan L_q harus sama dengan jumlah pelayan yang sibuk, maka diperoleh :

$$\bar{c} = L_s - L_q = \frac{\lambda_{eff}}{\mu}$$

di mana $\bar{c}$ adalah jumlah pelayanan yang sibuk yang diperkirakan.

2.7. Proses Poisson dan Distribusi Eksponensial

Menurut Praptono (1986), proses poisson adalah proses proses cacah yang mempunyai batasan tertentu yaitu diantaranya N(t) mengikuti distribusi poisson dengan rata-rata λt dimana λ suatu konstanta.

Beberapa asumsi untuk proses poisson adalah sebagai berikut (Praptono, 1986) :

1. N(t) independen terhadap banyaknya kejadian peristiwa E yang akan terjadi di dalam selang waktu yang lalu artinya N(t) tak bergantung pada pengalaman yang lalu.
2. Homogenitas dalam waktu

Yang dimaksud homogenitas dalam waktu ialah $P_x(t)$ hanya tergantung pada panjang t atau panjang selang waktu atau tidak tergantung dimana selang waktu berada.

3. Regularitas

   Didalam suatu interval kecil h, probabilitas bahwa banyaknya kejadian terjadi lebih dari sekali adalah 0 dalam interval h.

Menurut Gross dan Haris (1998), pada umumnya model antrian diasumsikan bahwa waktu antar kedatangan dan waktu pelayanan mengikuti distribusi eksponensial, atau sama dengan rata-rata kedatangan dan rata-rata pelayanannya mengikuti distribusi Poisson.

<u>Teorema I</u>

Untuk suatu proses Poisson, jumlah kedatangan terjadi pada interval waktu t adalah variabel random yang mengikuti distribusi Poisson dengan rata-rata λt dan probabilitas dari n kedatangan adalah $\dfrac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}$.

Bukti :

Misal $P_n(t)$ adalah kemungkinan dari n kedatangan dalam interval waktu t, di mana n = 0, 1, 2, 3, …. Kemungkinan terjadi n kedatangan dapat dinyatakan dengan mengembangkan persamaan diferensial.

a. Untuk $n \geq 1$:

$P_n(t+\Delta t) =$ Pr{n kedatangan pada saat t dan 0 kedatangan pada saat Δt}+ Pr{n-1 kedatangan pada saat t dan 1 kedatangan pada saat Δt}+

Pr{n-2 kedatangan pada saat t dan 2 kedatangan pada saat Δt}+

… + Pr{0 kedatangan dalam t dan n kedatangan pada saat Δt}.

(2.1)

Dengan menggunakan asumsi 1, 2, dan 3, maka persamaan (2.1) menjadi :

$$P_n(t+\Delta t) = P_n(t)[1-\lambda\Delta t- o(\Delta t)] + P_{n-1}(t)[\lambda\Delta t + o(\Delta t)] + o(\Delta t) +$$

$$P_{n-2}(t)(t)o(\Delta t) + ... + P_0(t)\, o(\Delta t) \quad (2.2)$$

di mana $o(\Delta t)$ menyatakan bentuk{n-j kedatangan pada saat t dan j kedatangan pada Δt ; 2≤ j ≤ n}.

a. Untuk n = 0 didapat :

$$P_0(t+\Delta t) = P_0(t)[1-\lambda\Delta t- o(\Delta t)] + o(\Delta t)$$

$$P_0(t+\Delta t) = P_0(t) - P_0(t)\lambda\Delta t- P_0(t)\, o(\Delta t)] + o(\Delta t)$$

(2.3)

Persamaan (2.2) dan (2.3) ditulis kembali dengan menggabungkan semua bentuk yang memuat $o(\Delta t)$, sehingga didapat :

$$P_0(t+\Delta t) - P_0(t) = -\lambda\Delta t P_0(t) + P_0(t)\, o(\Delta t) + o(\Delta t)$$

$$= -\lambda\Delta t P_0(t) + o(\Delta t) \quad (2.4)$$

dan $P_n(t+\Delta t) - P_n(t) = -\lambda\Delta t P_n(t) + \lambda\Delta t P_{n-1}(t) + o(\Delta t)$, ($n \geq 1$).

(2.5)

Persamaan (2.4) dan (2.5) dibagi dengan Δt dan diambil limit $\Delta t \to 0$, sehingga diperoleh :

$$\lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{P_0(t+\Delta t)-P_0(t)}{\Delta t}\right] = \lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{-\lambda(\Delta t)P_0(t)}{\Delta t}+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}\right] = -\lambda P_0(t)+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{P_n(t+\Delta t)-P_n(t)}{\Delta t}\right] = \lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{-\lambda(\Delta t)P_n(t)}{\Delta t}+\frac{\lambda(\Delta t)P_{n-1}(t)}{\Delta t}+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}\right]$$

$$= -\lambda P_n(t)+\lambda P_{n-1}(t)+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}, \quad (n \ge 1)$$

karena $\frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$ maka:

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t)$$

(2.6)

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t), \ (n \ge 1)$$

(2.7)

Dari persamaan (2.6), untuk n = 0 diperoleh :

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t)$$

$$\frac{dP_0(t)}{P_0(t)} = -\lambda dt$$

$\ln P_0(t) = -\lambda t$

$P_0(t) = e^{-\lambda t}$

Dari persamaan (2.7), untuk n = 1 diperoleh :

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = -\lambda P_1(t) + \lambda P_0(t)$$

$$\frac{dP_1(t)}{dt} + \lambda P_1(t) = \lambda P_0(t)$$

$$\frac{dP_1(t)}{dt} + \lambda P_1(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

$$e^{\lambda t}\,\frac{dP_1(t)}{dt} + \lambda e^{\lambda t} P_1(t) = \lambda$$

$$\frac{d}{dt}(e^{\lambda t} P_1(t)) = \lambda$$

$$P_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$$

Untuk n = 2 diperoleh :

$$\frac{dP_2(t)}{dt} = -\lambda P_2(t) + \lambda P_1(t)$$

$$\frac{dP_2(t)}{dt} + \lambda P_2(t) = \lambda P_1(t)$$

$$\frac{dP_2(t)}{dt} + \lambda P_2(t) = \lambda \lambda t e^{-\lambda t}$$

$$e^{\lambda t}\,\frac{dP_2(t)}{dt} + \lambda e^{\lambda t} P_2(t) = \lambda^2 t$$

$$\frac{d}{dt}(e^{\lambda t} P_2(t)) = \lambda^2 t$$

$$e^{\lambda t} P_2(t) = \int \lambda^2 t dt$$

$$P_2(t) = \frac{(\lambda t)^2}{2} e^{-\lambda t} = \frac{(\lambda t)^2}{2.1} e^{-\lambda t} = \frac{(\lambda t)^2}{2!} e^{-\lambda t}$$

Untuk n = 3, diperoleh:

$$\frac{dP_3(t)}{dt} = -\lambda P_3(t) + \lambda P_2(t)$$

$$\frac{dP_3(t)}{dt} + \lambda P_3(t) = \lambda P_2(t)$$

$$\frac{dP_3(t)}{dt} + \lambda P_3(t) = \lambda \frac{(\lambda t)^2}{2} e^{-\lambda t}$$

$$e^{\lambda t} \frac{dP_3(t)}{dt} + \lambda P_3(t) e^{\lambda t} = \lambda \frac{(\lambda t)^2}{2}$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\lambda t} P_3(t)\right) = \frac{1}{2}\lambda^3 t^2$$

$$e^{\lambda t} P_3(t) = \int \frac{1}{2}\lambda^3\, t^2\, dt$$

$$e^{\lambda t} P_3(t) = \frac{1}{6}\lambda^3 t^3$$

$$P_3(t) = \frac{1}{6}\lambda^3 t^3 e^{-\lambda t} = \frac{(\lambda t)^3}{3.2.1} e^{-\lambda t}$$

$$P_3(t) = \frac{(\lambda t)^3}{3!} e^{-\lambda t}$$

Sehingga dapat diambil suatu rumus umum, yaitu :

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} \quad ; \qquad n \geq 0 \tag{2.8}$$

Terbukti bahwa probabilitas n kedatangan yang terjadi pada interval waktu t adalah $\frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$, dengan jumlah kedatangan yang terjadi pada interval waktu t adalah variabel acak yang mengikuti suatu distribusi Poisson dengan parameter λt (Gross dan Haris,1998).

<u>*Theorema 2*</u>

Jika jumlah kedatangan suatu variabel random mengikuti distribusi Poisson maka waktu antar kedatangannya mengikuti distribusi Eksponensial.

Bukti :

f (t) = fungsi densitas probabilitas dari interval waktu t antar pemunculan kejadian yang berturut-turut, t ≥0.

F (t) = fungsi distribusi kumulatif dari t

Jika T variabel acak yang menyatakan interval waktu antara dua kejadian berturutan dari N(t), maka

$P\{T \geq t\} = P$\{tidak ada kedatangan dalam waktu t\} $= P_0(t) = e^{-\lambda t}$

$$\int_T^{\infty} f(t)dt = P_0(t) = e^{-\lambda t}$$

atau menggunakan F(t) sebagai fungsi distribusi kumulatif dari T diperoleh:

$$F(t) = P \quad \{T \leq t\} = 1 - P \quad (T > t) = 1 - e^{-\lambda t} \tag{2.9}$$

maka fungsi densitasnya adalah

$$f(t) = \frac{d\,F(t)}{dt} = \lambda\, e^{-\lambda t} \tag{2.10}$$

yang merupakan fungsi densitas dari distribusi eksponensial dengan parameter λ.

Ekspektasi dari T adalah:

$$E(T) = \int_0^{\infty} tf(t)dt = \int_0^{\infty} t\lambda e^{-\lambda t}dt = \lambda \int_0^{\infty} te^{-\lambda t}dt$$

$$= \lambda \left(-\frac{t}{\lambda} e^{-\lambda t} \Big]_0^{\infty} + \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dt \right)$$

$$= \lambda \left(0 - \frac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda t} \Big]_0^{\infty} \right) = \lambda \left(0 - \left(0 - \frac{1}{\lambda^2} \right) \right) = \lambda \left(\frac{1}{\lambda^2} \right) = \frac{1}{\lambda}$$

Jadi, dapat dilihat bahwa jika kedatangan mengikuti proses Poisson dengan parameter λ, maka suatu variabel acak berturutan akan mengikuti distribusi Eksponensial dengan parameter $\frac{1}{\lambda}$. Atau jika rata-rata waktu antar kedatangan adalah $\frac{1}{\lambda}$, maka dapat dilihat bahwa rata-rata kedatangan adalah λ. (Gross dan Haris, 1998).

2.8. Uji Kecocokan Distribusi

Uji kecocokan distribusi digunakan untuk menentukan sampai seberapa jauh data sampel yang teramati selaras atau cocok dengan model tertentu yang ditawarkan.apakah suatu populasi atau variabel acak mempunyai distribusi teoritik tertentu. Uji-uji keselarasan (*goodness of fit*) merupakan uji kecocokan distribusi yang bermanfaat untuk mengevaluasi sampai seberapa jauh suatu model mampu mendekati situasi nyata yang digambarkannya (*Daniel, 1989*).

Uji hipotesa distribusi dapat menggunakan uji Kai-kuadrat dan uji Kolmogorov-Smirnov. Perbedaannya adalah uji Kolmogorov-Smirnov dirancang secara khusus untuk distribusi kontinu dan dapat digunakan untuk distribusi diskrit bila ukuran sampel kurang dari 30, sedangkan uji Kai-Kuadrat tepat digunakan jika datanya nominal. Uji Kai-Kuadrat mensyaratkan agar data dikelompokan kedalam kategori-kategori yang tidak saling tumpang tindih dan memiliki ukuran sampel besar. Ukuran sampel besar tersebut paling sedikit 30, dengan syarat tidak ada satupun frekuensi harapan yang kurang dari satu. Jika terdapat frekuensi harapan yang kurang dari satu, biasanya dilakukan penggabungan kategori-kategori sampai syarat frekuensi harapan minimum terpenuhi.

2.8.1. Uji Kolmogorov Smirnov

Adapun prosedur pengujian Kolmogorov Smirnov adalah sebagai berikut:

a. Menentukan hipotesis

H_0 : Data yang diamati berdistribusi Poisson

H_1 : Data yang diamati tidak berdistribusi Poisson

b. Menentukan taraf signifikansi

Disini akan digunakan taraf signifikansi dengan $\alpha = 5\%$

c. Menentukan Statistik uji

$D = Sup|S(x) - F_0(x)|$

dengan:
$S(x)$: distribusi kumulatif data sampel

$F_0(x)$: distribusi kumulatif dari distribusi yang dihipotesiskan

d. Kriteria Uji

Tolak H_0 pada taraf signifikansi $\alpha = 5\%$ jika nilai D > nilai $D^*(\alpha)$. Nilai $D^*(\alpha)$ adalah nilai kritis yang diperoleh dari tabel Kolmogorov-Smirnov.

2.8.2. Uji Chi-Square

Langkah-langkah pengujian Chi-Square adalah sebagai berikut :

a. Menentukan hipotesis

H_0 : sampel yang diambil berasal dari populasi berdistribusi Poisson

H_1 : sampel yang diambil tidak berasal dari populasi berdistribusi Poisson

b. Menentukan nilai taraf signifikansi

Disini akan digunakan taraf signifikansi dengan $\alpha = 5\%$

c. Mencari nilai χ^2_{hitung}

i. Mencari frekuensi pengamatan pada tiap kelas ke- *i* (f_i)

ii. Menentukan frekuensi harapan (frekuensi teoritis) pada tiap kelas ke- *i* frekuensi teoritis dihitung dengan:

$$E_i = \left(\sum_{i=0}^{m} f_i\right) P_i$$

iii. Menentukan nilai χ^2, adalah sebagai berikut : $\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$

dimana :

O_i : Frekuensi-frekuensi yang teramati

E_i : Frekuensi-frekuensi harapan.

d. Kriteria uji

Tolak H_0 jika nilai $\chi^2 \geq \chi^2_{a,v}$ dengan v=r-1-g, g= jumlah parameter distribusi yang ditetapkan.

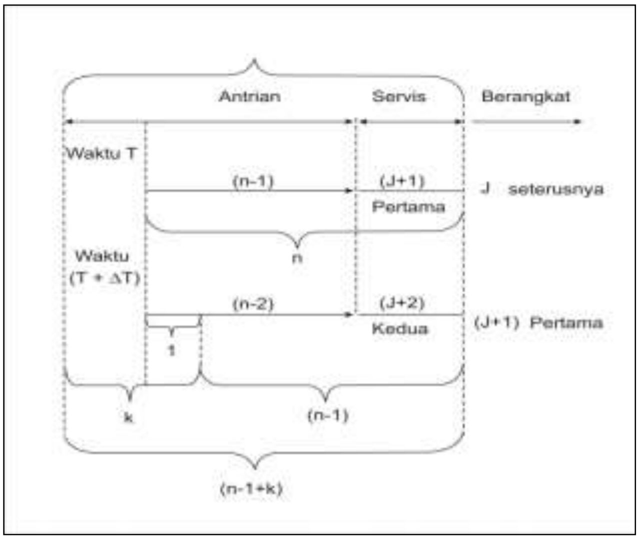
2.9. Model Antrian (M/G/1):(GD/∞/∞)

Suatu sistem dimana pelanggan telah selesai dilayani dan pelayanan itu dimulai lagi untuk pelayanan berikutnya dalam antrian, maka waktu pelayanan tersebut berdistribusi random. Fungsi distribusi kumulatif (CDF) dari waktu pelayanan tersebut ditunjukkan dengan F(t) dan fungsi densitasnya dengan f(t) jika ada. Proses kedatangan ini dinamakan Poisson, dimana peristiwa dari kedatangan para pelanggan dapat terjadi lebih dari satu kali pada selang waktu atau ruang dengan parameter λ (Gross dan Harris, 1998).

Menurut Kakiay (2004), Model (M/G/1):(GD/∞/∞) atau disebut juga dengan model Pollazck-Khintchine (P–K) adalah suatu formula yang akan diperoleh melalui pelayan tunggal dengan situasi yang memenuhi tiga asumsi berikut:

1. Kedatangan Poisson dengan rata-rata kedatangan λ
2. Distribusi waktu pelayanan umum atau general dengan ekspektasi rata-rata pelayanan $E[t] = \frac{1}{\mu}$ dan varian $\mathrm{var}[t]$
3. Keadaan *steady-state* dimana $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$.

Menurut Kakiay (2004), proses antrian saluran tunggal dengan kedatangan Poisson dan pelayanan umum dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar Sistem Antrian (P-K)

Di mana:

n = jumlah pelanggan dalam sistem

t = waktu untuk melayani pelanggan

k = jumlah pelanggan yang baru datang

n’ = jumlah pelanggan setelah dilayani.

Simbol yang digunakan pada gambar 5 menunjukkkan bahwa:

1. t mewakili waktu ketika j pelanggan berangkat dan $(t + \Delta t)$ mewakili waktu ketika pelanggan selanjutnya (j + 1) berangkat.
2. Notasi j, j + 1, j + 2, ... tidak harus diartikan bahwa pelanggan masuk dengan disiplin antrian pelayanan FCFS. Tetapi, hal itu hanya untuk memperkenalkan perbedaan keberangkatan pelanggan pada sistem. Hasil dari model ini dapat digunakan untuk beberapa disiplin antrian, yaitu FCFS, LCFS, SIRO.

Gambar 5 memperlihatkan bahwa:

$$n' = \begin{cases} n - 1 + k, \text{untuk } n > 0 \\ k \qquad\quad , \text{untuk } n = 0 \end{cases} \tag{10}$$

Dari persamaan (10), jika dalam sistem n = 0, maka sistem kosong atau tidak ada pelanggan dalam antrian dan tidak ada yang dilayani. Berarti jumlah pelanggan yang akan dilayani hanya akan sama dengan k (jumlah pelanggan yang baru datang).

Karena kedatangan yang terjadi mengikuti distribusi Poisson dan berdasarkan persamaan $P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$, maka peluang kedatangan k pada saat t adalah:

$$P\{k \mid t\} = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!} \tag{11}$$

Selanjutnya, persamaan (10) akan dibawa ke bentuk formula P-K, yaitu;

$$n` = n - \delta + k \tag{12}$$

dengan δ didefinisikan sebagai:

$$\delta = \begin{cases} 1 \ , \text{untuk}\, n > 0 \\ 0 \ , \ \text{untuk}\, n = 0 \end{cases} \tag{13}$$

dengan n adalah jumlah pelanggan dalam sistem dan δ adalah fungsi yang memetakan setiap n ke bilangan riil, yaitu jika n = 0 (dalam sistem tidak ada pelanggan), maka tidak ada yang dilayani dan apabila dalam sistem ada n > 0 pelanggan, maka ada pelanggan yang ditunjukkan dengan nilai 1.

Dengan mengasumsikan bahwa solusi *steady-state*, maka dapat diambil nilai ekspektasi dari variabel random, yaitu E[n] = E[n`] dan $E[n^2] = E[(n`)^2]$.

$$E[n`] = E[n] - E[\delta\ ] + E[k] \tag{14}$$

Sehingga persamaan (14) menjadi

$$E[\delta] = E[k] \tag{15}$$

Dengan mengkuadratkan persamaan (12), diperoleh:

$$(n`)^2 = (n - \delta + k)^2$$

$$= n^2 + k^2 + 2nk + \delta^2 - 2n\delta - 2k\delta \tag{16}$$

Didefinisikan $\delta^2 = \delta$ dan $n\delta = n$, maka persamaan (16) menjadi:

$$(n`)^2 = n^2 + k^2 + 2nk + \delta^2 - 2n\delta - 2k\delta = n^2 + k^2 + 2nk + \delta - 2n - 2k\delta$$

$$= n^2 + k^2 + 2n(k-1) - \delta(2k-1)$$

$$-2n(k-1) = n^2 - (n`)^2 + k^2 - \delta(2k-1)$$

$$n = \frac{n^2 - (n`)^2 + k^2 - \delta(2k-1)}{-2(k-1)}$$

$$n = \frac{n^2 - (n`)^2 + k^2 - \delta(2k-1)}{-2k + k}$$

$$n = \frac{n^2 - (n`)^2 + k^2 - \delta(2k-1)}{2(1-k)}$$

Dengan mengambil ekspektasi dari kedua sisi, maka:

$$E[n] = \frac{E[n^2] - E[(n`)^2] + E[k^2] - E[\delta(2k-1)]}{2(1-E[k])}$$

$$E[n] = \frac{0 + E[k^2] - 2E[\delta k] + E[\delta]}{2(1-E[k])} \tag{17}$$

Dengan mensubsitusikan $E[\delta] = E[k]$ ke persamaan (17), maka:

$$E[n] = \frac{E[k^2] + E[k] - 2(E[k])^2}{2(1-E[k])} \tag{18}$$

Sekarang, E[k] dan E[k^2] diperlukan untuk menentukan E[n]. Karena kedatangan yang terjadi menurut distribusi Poisson, maka diperoleh:

$$E[k \mid t] = \lambda t \text{ dan } E[k^2 \mid t] = (\lambda t)^2 + \lambda t$$

Dari harga harapan suatu mean $E[t] = \int_0^\infty t\, f(t)\, dt$ dan var(t) $= E[t^2] - (E[t])^2$, maka;

$$E[k] = \int_0^\infty E[k \mid t] f(t) dt = \int_0^\infty \lambda\, t\, f(t)\, dt$$

$$E[k] = \lambda E[t] \tag{19}$$

Dan

$$E[k^2] = \int_0^\infty E[k^2 \mid t] f(t) dt = \int_0^\infty \{(\lambda t)^2 + \lambda t\} f(t) dt$$

$$= \lambda^2 \int_0^\infty t^2 f(t) dt + \lambda \int_0^\infty t f(t) dt = \lambda^2 \operatorname{var}[t] + \lambda^2 (E[t])^2 + \lambda E[t]$$

$$E[k^2] = \lambda^2 (E[t])^2 + \lambda^2 \operatorname{var}[t] + \lambda E[t] \tag{20}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (19) dan (20) ke persamaan (18), maka diperoleh

$$E[n] = \frac{E[k^2] + E[k] - 2E^2[k]}{2(1 - E[k])}$$

$$= \frac{\lambda^2 (E[t])^2 + \lambda^2 \operatorname{var}[t] + \lambda E[t] + \lambda E[t] - 2\lambda^2 (E[t])^2}{2(1 - \lambda E[t])}$$

$$= \frac{\lambda^2 (E[t])^2 + \lambda^2 \operatorname{var}[t]}{2(1 - \lambda E[t])} + \frac{2\lambda E[t](1 - \lambda E[t])}{2(1 - \lambda E[t])}$$

$$= \frac{\lambda^2 (E[t])^2 + \lambda^2 \operatorname{var}[t]}{2(1 - \lambda E[t])} + \lambda E[t]$$

$$L_s = \lambda E[t] + \frac{\lambda^2 (E[t])^2 + \lambda^2 \operatorname{var}[t]}{2(1 - \lambda E[t])}$$

Dengan $E[t] = \frac{1}{\mu}$ dan $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$, maka

$$L_s = \rho + \frac{\rho^2 + \lambda^2 \operatorname{var}(t)}{2(1 - \rho)} \qquad (21)$$

Persamaan (21) dikenal sebagai formula P-K (Kakiay, 2004).

Dengan Demikian dari formulas P-K ini dapat diperoleh rumus selanjutnya, yaitu:

$$L_q = L_s - \rho$$

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

2.10. Model Antrian (M/M/1) : (GD/∞/∞)

Ini adalah model pelayanan tunggal tanpa batas kapasitas baik dari kapasitas sistem maupun kapasitas sumber pemanggilan dengan distribusi kedatangan dan distribusi pelayanan mengikuti distribusi Poisson serta peraturan pelayanan umum. Diasumsikan bahwa laju kedatangan tidak bergantung pada jumlah dalam sistem tersebut, yaitu $\lambda_n = \lambda$ untuk semua n dan pelayanan tunggal dalam sistem tersebut menyelesaikan pelayanan dengan kecepatan konstan, yaitu (Taha, 1996) :

$\mu_n = \mu$ untuk semua n.

Probabilitas untuk n pelanggan

$P_n = \rho^n P_0$ n = 0,1,2,...

Dengan menggunakan fakta bahwa jumlah semua p_n untuk n=0,1,2,…, sama dengan 1, diperoleh :

$$p_0\left(1 + \rho + \rho^2 + ...\right) = 1$$

Jika diasumsikan bahwa ρ <1, maka

$$p_0\left(\frac{1}{1-\rho}\right) = 1 \quad \text{atau} \quad p_0 = 1 - \rho$$

Dan diperoleh rumus umum berikut ini :

$$p_n = (1-\rho)\rho^n \qquad \text{n=0,1,2,…}$$

Persyaratan matematis untuk model ini adalah $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$ <1, berarti bahwa $\lambda < \mu$, yang menyatakan bahwa laju kedatangan harus secara ketat lebih kecil daripada laju pelayanan di sarana tersebut agar sistem mencapai stabilitas (kondisi steady state). Dengan demikian, dapat diperoleh ukuran kinerja sebagai berikut :

a. Jumlah rata-rata pelanggan yang diperkirakan dalam sistem

$$L_s = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n = \sum_{n=0}^{\infty} n(1-\rho)\rho^n = (1-\rho)\rho \frac{d}{dp}\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n = (1-\rho)\rho \frac{d}{dp}\left(\frac{1}{1-\rho}\right) = \frac{\rho}{1-\rho}$$

b. Jumlah rata-rata pelanggan yang diperkirakan dalam antrian

$$L_q = L_s - \rho = \frac{\rho}{1-\rho} - \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

c. Waktu rata-rata menunggu yang diperkirakan dalam sistem

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\frac{\rho}{1-\rho} = \frac{1}{\mu(1-\rho)}$$

d. Waktu rata-rata menunggu yang diperkirakan dalam antrian

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\rho^2}{1-\rho}\frac{1}{\lambda} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$$

2.11. Model Antrian (M/M/c) : (GD/∞/∞)

Menurut Gross dan Harris (1998), pada model antrian ini pelanggan tiba dengan laju konstan λ dan maksimum c pelanggan dapat dilayani secara bersamaan. Laju pelayanan per pelayan adalah konstan sama dengan μ. Pengaruh dari penggunaan c pelayan yang paralel adalah mempercepat laju pelayanan dengan memungkinkan dilakukannya beberapa pelayanan secara bersamaan. Jika jumlah pelanggan dalam sistem n, sama dengan atau lebih besar dari c, laju keberangkatan gabungan dari sarana tersebut adalah $c\mu$. Tetapi jika n lebih kecil dari c, maka laju pelayanan adalah $n\mu$ (Taha, 1996). Jadi dalam bentuk model yang digeneralisasi :

$$\lambda_n = \lambda \qquad \text{untuk semua } n \geq 0$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & ; n < c \\ c\mu & ; n \geq c \end{cases}$$

Dengan memisalkan $r = \lambda / \mu$ dan $\rho = r / c = \lambda / c\mu$, diperoleh probabilitas untuk 0 pelanggan dapat ditulis:

$$P_0 = \left\{ \sum_{n=0}^{c-1} \frac{(c\rho)^n}{n!} + \frac{(c\rho)^c}{c!\,(1-\rho)} \right\}^{-1}$$

Sedangkan probabilitas untuk *n* pelanggan dapat ditulis:

$$P_n = \frac{P_0}{c!\,c^{n-c}} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n = \frac{\lambda^n}{c!\,c^{n-c}\,\mu^n} P_0$$

Dengan demikian diperoleh perhitungan ukuran kinerja sistem dalam model (M/M/c):(GD/∞/∞) sebagai berikut :

1. Jumlah rata-rata menunggu dalam antrian:

$$L_q = \left(\frac{r^c \rho}{c!(1-\rho)^2} \right) P_0$$

2. Jumlah rata-rata pelanggan yang menunggu dalam sistem:

$$L_s = L_q + r$$

$$L_s = \left(\frac{r^c \rho}{c!(1-\rho)^2} \right) P_0 + r$$

3. Rata-rata waktu pelanggan menunggu dalam antrian:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \left(\frac{r^c}{c!(c\mu)(1-\rho)^2} \right) P_0$$

4. Rata-rata waktu pelanggan menunggu dalam sistem:

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda} = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu} + \left(\frac{r^c}{c!(c\mu)(1-\rho)^2} \right) P_0$$