

## **BAB II**

### **KAJIAN TEORI**

Bab ini akan membahas mengenai pengertian-pengertian dasar yang akan digunakan sebagai landasan pembahasan mengenai model *Seemingly Unrelated Regression* (SUR). Pengertian-pengertian dasar yang akan dibahas pada bab ini adalah:

#### **A. Jenis-jenis Data**

Dalam ekonometri dikenal tiga jenis data yaitu data *time series*, data *cross section* dan data panel (Wooldridge, 2004 :5-10).

1. Data *time series* adalah data yang ditampilkan berdasarkan waktu, seperti data bulanan, data harian, data mingguan atau jenis waktu yang lain.

Contoh data *time series* adalah;

- a. Data penjualan bulanan sepeda motor di daerah A dari tahun 2000 sampai 2007.
- b. Data produksi harian bahan baku X pada bulan September 2008.
- c. Data agregat penjualan tahunan PT ABC untuk periode 2000-2008

2. Data *Cross Section* adalah data pada satu atau lebih variabel yang dikumpulkan pada satu waktu tertentu. Contoh data *cross section* adalah

- a. Data biaya promosi di sepuluh area pemasaran produk X selama bulan januari 2008.
- b. Data produksi bahan baku X, Y, Z untuk tahun 2008.

3. Data Panel adalah gabungan data yang mengandung unsur *time series* dan *cross section*. Contoh data panel adalah data penjualan produk X dari tahun 2000 sampai 2006 untuk setiap area penjualan di lima area penjualan yang ada.

## B. Matriks

Matriks memegang peranan yang sangat penting dalam dunia statistika dan matematika. Dengan matriks, penulisan persamaan matematika menjadi lebih singkat dan efektif.

Definisi 2.1 (Anton, 2000 : 22)

Sebuah matriks adalah susunan persegi panjang atau persegi dari bilangan-bilangan atau variabel. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan entri dalam matriks.

Penulisan matriks menggunakan huruf tebal dan kapital.

$$\mathbf{A} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} \end{bmatrix},$$

dengan  $a_{ij}$  menyatakan entri yang terdapat dalam baris  $i$  dan kolom  $j$  pada matriks

**A.**

Matriks kolom (vektor kolom) adalah matriks yang terdiri dari satu kolom dan  $n$  baris, sedangkan yang disebut dengan matriks baris (vektor baris) adalah matriks yang terdiri dari satu baris dan  $k$  kolom.

Definisi 2.2 (Kolman,1997:13)

Dua matriks  $\mathbf{A} = [a_{ij}]$  dan  $\mathbf{B} = [b_{ij}]$  dikatakan sama ( $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ ) jika dan hanya jika keduanya memiliki orde yang sama dan semua elemen yang bersesuaian (seletak) sama, yaitu jika dan hanya jika

$$a_{ij} = b_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, m ; j = 1, 2, \dots, n)$$

Definisi 2.3 (Anton, 2000 : 23)

Jika  $\mathbf{A}$  dan  $\mathbf{B}$  adalah matriks-matriks dengan orde sama, maka jumlah  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$  adalah matriks yang diperoleh dengan menambahkan elemen-elemen  $\mathbf{A}$  dengan elemen-elemen  $\mathbf{B}$  yang bersesuaian, dan selisih  $\mathbf{A} - \mathbf{B}$  adalah matriks yang diperoleh dengan mengurangi elemen-elemen  $\mathbf{A}$  dengan elemen-elemen  $\mathbf{B}$  yang bersesuaian. Matriks-matriks dengan orde berbeda tidak bisa ditambahkan atau dikurangkan.

Definisi 2.4 (Kolman, 1997:14)

Jika  $\mathbf{A}$  adalah suatu matriks dan  $k$  adalah sebarang skalar, maka hasil kali  $k\mathbf{A}$  adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan setiap elemen  $\mathbf{A}$  dengan  $k$ .

Penulisan dalam notasi matriks jika  $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ , maka  $(k\mathbf{A})_{ij} = k(\mathbf{A})_{ij} = ka_{ij}$

Definisi 2.5 (Gujarati, 2004 : 917)

Jika  $\mathbf{A}$  adalah sebuah matriks  $m \times r$  dan  $\mathbf{B}$  adalah sebuah matriks  $r \times n$ , maka hasil kali  $\mathbf{AB}$  adalah matriks  $m \times n$  yang elemen-elemennya didefinisikan sebagai berikut ; untuk mencari anggota dalam baris  $i$  dan kolom  $j$  dari  $\mathbf{AB}$ , pilihlah baris  $i$  dari matriks  $\mathbf{A}$  dan kolom  $j$  dari matriks  $\mathbf{B}$ , kalikan elemen-elemen

yang bersesuaian dari baris dan kolom secara bersama-sama dan kemudian jumlahkan hasil kalinya yang dihasilkan.

Definisi perkalian matriks mensyaratkan bahwa banyak kolom faktor pertama **A** sama dengan banyak baris faktor kedua **B** untuk membentuk hasil kali **AB**. Jika syarat ini tidak terpenuhi, hasil kalinya tidak terdefinisi.

Dalam notasi matriks,

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ir} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & b_{r1} & \cdots & b_{rj} & \cdots & b_{rn} \end{bmatrix}$$

Elemen baris ke- $i$  dan kolom ke- $j$  matriks **AB** adalah

$$[\mathbf{AB}]_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ir}b_{rj} = \sum_{k=1}^r a_{ik}b_{kj}$$

Berikut terdapat beberapa jenis matriks khusus yaitu:

1. Matriks persegi, adalah suatu matriks dengan banyaknya baris  $m$  sama dengan banyaknya kolom  $n$  ( $m=n$ ) untuk semua matriks **A**. Jika  $m=n$ , maka **A** disebut matriks persegi orde  $n$ .

$$\mathbf{A} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

2. Matriks identitas, adalah suatu matriks dengan elemen-elemen pada diagonal utama bernilai 1 dan elemen-elemen lainnya bernilai nol. Biasanya matriks ini diberi simbol **I**.

3. Matriks simetris. Jika matriks  $A = [a_{ij}]$  ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$  ( $A$  merupakan matriks persegi) dan  $a_{ij} = a_{ji}$  , maka  $A$  disebut matriks simetris. Matriks simetris juga dapat didefinisikan sebagai matriks persegi yang simetris terhadap diagonal utamanya. Matriks simetris identik dengan transposnya ( $A' = A$  atau  $a_{ij} = a_{ji}$  ). Untuk suatu matriks  $B$  orde  $m \times n$ ,  $BB'$  dan  $B'B$  simetris dengan orde  $m \times m$  dan  $n \times n$ .
4. Matriks diagonal, adalah suatu matriks dengan elemen-elemen selain pada diagonal utama mempunyai nilai 0 dan paling tidak satu elemen pada diagonal utama tidak sama dengan 0.
5. Matriks nol, adalah suatu matriks dimana semua elemen mempunyai nilai nol. Biasanya diberi simbol  $\mathbf{0}$ . Jika  $A$  adalah sebarang matriks dan  $\mathbf{0}$  adalah matriks nol dengan orde sama, maka  $A + \mathbf{0} = A$ .

Definisi 2.6 (Timm, 2002 :28)

Jika  $A$  adalah sebarang matriks  $m \times n$ , maka transpos  $A$  dinyatakan dengan  $A'$  dan didefinisikan dengan matriks  $n \times m$  dengan menukar baris dan kolom matriks

Teorema 2.1 (Timm, 2002 : 28)

Untuk matriks-matriks  $A, B$  dan skalar  $k$  , berlaku sifat-sifat transpos matriks sebagai berikut:

1.  $(A')' = A$
2.  $(A \pm B)' = A' \pm B'$
3.  $(kA)' = kA'$ , dengan  $k$  adalah sebarang skalar

$$4. (AB)' = B'A'$$

### 1. Determinan Matriks

Definisi 2.7 (Anton, 2000 :77)

Jika  $A$  adalah matriks persegi, maka minor entri  $a_{ij}$  dinyatakan dengan  $M_{ij}$  dan didefinisikan sebagai determinan submatriks  $A$  setelah baris ke- $i$  dan kolom ke- $j$  dihilangkan dari faktor  $A$ . Bilangan  $(-1)^{1+j}M_{ij}$  dinyatakan sebagai  $C_{ij}$  dan dinamakan kofaktor entri  $a_{ij}$ .

Teorema 2.2 (Steven, 2002 : 66)

Determinan matriks  $A$  yang berukuran  $n \times n$  dapat dihitung dengan mengalikan entri-entri dalam suatu baris (atau kolom) dengan kofaktor-kofaktornya dan menjumlahkan hasil-hasil kali yang dihasilkan; yakni untuk setiap  $1 \leq i \leq n$  dan  $1 \leq j \leq n$ , maka:

$$\det(A) = |A| = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}$$

(perluasan kofaktor disepanjang kolom ke- $j$ )

dan

$$\det(A) = |A| = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}$$

(perluasan kofaktor disepanjang baris ke- $i$ )

Berdasarkan sifat determinan matriks, dapat diturunkan definisi matriks singular dan matriks nonsingular sebagai berikut:

Definisi 2.8 (Assauri, 1983 : 78)

Jika suatu matriks  $\mathbf{A}$ , determinannya sama dengan nol atau  $\det(\mathbf{A}) = 0$  maka matriks yang demikian disebut sebagai matriks singular, sedangkan matriks nonsingular yaitu jika determinan dari matriks tersebut tidak sama dengan nol atau  $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ .

## 2. Invers Matriks

Definisi 2.9 (Lay, 1998 :110)

Invers dari suatu matriks persegi  $\mathbf{A}$  didefinisikan sebagai  $\mathbf{A}^{-1}$  yang memenuhi persamaan berikut:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

Teorema 2.3 (Lay, 1998 : 110)

Jika  $\mathbf{A}$  adalah matriks yang dapat dibalik, maka

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \mathit{adj}(\mathbf{A}) \quad (2.1)$$

$\mathit{adj}(\mathbf{A})$  merupakan transpos dari matriks kofaktor yang terbentuk dari matriks  $\mathbf{A}$ .

Teorema 2.4 (Johnson, 2007 : 96)

Jika  $\mathbf{A}$  dan  $\mathbf{B}$  adalah matriks-matriks persegi dengan orde sama dan memiliki invers, maka:

- a.  $(\mathbf{A}^{-1})' = (\mathbf{A}')^{-1}$
- b.  $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$

Teorema 2.5 (Anton, 2000 : 37)

Jika  $\mathbf{A}$  adalah suatu matriks yang dapat dibalik, maka:

- a.  $\mathbf{A}^{-1}$  dapat dibalik dan  $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$
- b. Untuk sebarang skalar  $k$  yang tidak sama dengan nol, matriks  $k\mathbf{A}$  dapat dibalik dan  $(k\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{k}\mathbf{A}^{-1}$

### 3. Perkalian Kronecker (*Kronecker Product*)

Perkalian kronecker antara dua matriks  $\mathbf{A}_{m \times n}$  dan  $\mathbf{B}_{p \times q}$  dapat dituliskan sebagai

(Timm , 2002 : 33)

$$\text{Jika } \mathbf{A}_{m \times n} = [a_{ij}] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ dan } \mathbf{B}_{p \times q} = [b_{ij}] =$$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pq} \end{pmatrix}, \text{ maka perkalian kronecker } \mathbf{A} \text{ dan } \mathbf{B} \text{ adalah}$$

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Teorema 2.6 (Greene, 2003 : 825)

Jika  $A$  merupakan matriks berukuran  $m \times m$  dan  $B$  berukuran  $n \times n$ , maka

a.  $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$

b.  $(A \otimes B)' = A' \otimes B'$

#### 4. Bentuk Kuadratik dan Matriks Definit

Definisi 2.10 (Johnston, 1972: 106)

Jika diberikan  $A$  matriks persegi berukuran  $n \times n$  yang simetris, dan  $x$  merupakan vektor kolom, maka bentuk  $x'Ax$  disebut bentuk kuadratik (*quadratic form*) dari  $A$ .

Definisi 2.11 (Johnston, 1972: 106)

Matriks  $A$  dikatakan definit positif jika dan hanya jika  $x'Ax > 0$  untuk semua  $x \neq \mathbf{0}$ , dan dikatakan semidefinit positif jika  $x'Ax \geq 0$  untuk semua  $x$ .

Definisi 2.12 (Assauri, 1983: 133)

Matriks  $A$  dikatakan definit negatif jika dan hanya jika  $x'Ax < 0$  untuk semua  $x \neq \mathbf{0}$ , dan dikatakan semidefinit negatif jika  $x'Ax \leq 0$  untuk semua  $x$ .

Teorema 2.7 (Judge dkk., 1988: 961)

Jika  $\mathbf{A}$  adalah suatu matriks definit positif maka

- $\mathbf{A}^{-1}$  definit positif
- Terdapat sebuah matriks nonsingular  $\mathbf{P}$  sedemikian sehingga  $\mathbf{P}'\mathbf{P}=\mathbf{A}^{-1}$  dan  $\mathbf{PAP}'=\mathbf{I}$ .

### C. Matriks Data Multivariat

Secara umum, sampel data pada analisis multivariat dapat digambarkan dalam bentuk sebagai berikut:

	Variabel-1	Variabel-2	...	Variabel-j	...	Variabel-p
Pengamatan-1	$x_{11}$	$x_{12}$	...	$x_{1j}$	...	$x_{1p}$
Pengamatan -2	$x_{21}$	$x_{22}$	...	$x_{2j}$	...	$x_{2p}$
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮
Pengamatan - $i$	$x_{i1}$	$x_{i2}$	...	$x_{ij}$	...	$x_{ip}$
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮
Pengamatan - $n$	$x_{n1}$	$x_{n2}$	...	$x_{nj}$	...	$x_{np}$

Bentuk  $n$  pengamatan terhadap  $p$  variabel dapat ditunjukkan dalam bentuk matriks  $\mathbf{X}$  dengan  $n$  baris dan  $p$  kolom berikut:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1j} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2j} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{i1} & x_{i2} & \cdots & x_{ij} & \cdots & x_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nj} & \cdots & x_{np} \end{bmatrix}$$

keterangan:

$x_{ij}$  : data pengamatan ke- $i$  pada variabel ke- $j$

$n$  : banyaknya pengamatan

$p$  : banyaknya variabel

### 1. Matriks Rata-rata (*Mean*, $\bar{x}$ )

Misalkan  $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}$  merupakan  $n$  pengukuran pada variabel 1. Rata-rata (*mean*) sampel yang ditulis dengan  $\bar{x}_1$  adalah:

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{1j} \quad (2.3)$$

Secara umum *mean* sampel ke- $i$  bila ada  $p$  variabel dan  $n$  pengukuran dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{ij}, \text{ dengan } i=1,2,3,\dots,p$$

Vektor *mean*  $\bar{\mathbf{X}}$  berukuran  $p \times 1$  dapat dituliskan :

$$\bar{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{1j} \\ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{2j} \\ \vdots \\ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{pj} \end{bmatrix} = \frac{1}{n} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{p1} & x_{p2} & \cdots & x_{pn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Vektor *mean* variabel random  $\mathbf{X}$  dapat ditulis dalam matriks sebagai berikut:

$$E(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} E(x_1) \\ E(x_2) \\ \vdots \\ E(x_p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_p \end{bmatrix} = \boldsymbol{\mu} \quad (2.5)$$

Misalkan  $\mathbf{X}$  dan  $\mathbf{Y}$  merupakan matriks random dengan orde sama, serta  $\mathbf{A}$  dan  $\mathbf{B}$  merupakan matriks konstan maka

$$E(\mathbf{AXB}) = \mathbf{AE(X)B} \quad (2.6)$$

(Johnson, 2007: 67)

## 2. Matriks Variansi-kovariansi ( $\Sigma$ )

Matriks variansi-kovariansi berukuran  $p \times p$  dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \Sigma &= E(\mathbf{X} - \mu)(\mathbf{X} - \mu)' \\
 &= E \left( \begin{bmatrix} X_1 - \mu_1 \\ X_2 - \mu_2 \\ \vdots \\ X_p - \mu_p \end{bmatrix} [X_1 - \mu_1, X_2 - \mu_2, \dots, X_p - \mu_p] \right) \\
 &= E \begin{bmatrix} (X_1 - \mu_1)^2 & (X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2) & \dots & (X_1 - \mu_1)(X_p - \mu_p) \\ (X_2 - \mu_2)(X_1 - \mu_1) & (X_2 - \mu_2)^2 & \dots & (X_2 - \mu_2)(X_p - \mu_p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (X_p - \mu_p)(X_1 - \mu_1) & (X_p - \mu_p)(X_2 - \mu_2) & \dots & (X_p - \mu_p)^2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} E(X_1 - \mu_1)^2 & E(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2) & \dots & E(X_1 - \mu_1)(X_p - \mu_p) \\ E(X_2 - \mu_2)(X_1 - \mu_1) & E(X_2 - \mu_2)^2 & \dots & E(X_2 - \mu_2)(X_p - \mu_p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E(X_p - \mu_p)(X_1 - \mu_1) & E(X_p - \mu_p)(X_2 - \mu_2) & \dots & E(X_p - \mu_p)^2 \end{bmatrix} \\
 \Sigma = Cov(\mathbf{X}) &= \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \dots & \sigma_{pp} \end{bmatrix} \tag{2.7}
 \end{aligned}$$

Variansi populasi pada matriks (2.7) di atas terletak pada diagonal utama, sedangkan kovariansi populasi adalah elemen matriks  $\Sigma$  yang terletak diluar diagonal.

Misalkan terdapat  $q$  kombinasi linear dari  $p$  variabel random  $X_1, X_2, \dots, X_p$  :

$$\begin{aligned}
 Z_1 &= c_{11} X_1 + c_{12} X_2 + \dots + c_{1p} X_p \\
 Z_2 &= c_{21} X_1 + c_{22} X_2 + \dots + c_{2p} X_p \\
 &\vdots \\
 Z_q &= c_{q1} X_1 + c_{q2} X_2 + \dots + c_{qp} X_p
 \end{aligned}$$

atau dalam notasi matriks menjadi

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{q1} & c_{q2} & \dots & c_{qp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_p \end{bmatrix} = \mathbf{C}\mathbf{X}$$

Selanjutnya kombinasi linear  $\mathbf{Z} = \mathbf{CX}$  memiliki variansi-kovariansi yang berbentuk:

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}(\mathbf{Z}) &= \text{Cov}(\mathbf{CX}) \\
 &= E((\mathbf{CX} - \mathbf{C}\boldsymbol{\mu})(\mathbf{CX} - \mathbf{C}\boldsymbol{\mu})') \\
 &= E((\mathbf{C}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}))(\mathbf{C}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}))') \\
 &= E(\mathbf{C}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})'\mathbf{C}') \\
 &= \mathbf{CE}((\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})')\mathbf{C}' \quad \text{berdasarkan sifat (2.6)} \\
 &= \mathbf{C}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{C}'
 \end{aligned}$$

Jadi  $\text{Cov}(\mathbf{Z}) = \mathbf{C}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{C}'$

### 3. Matriks korelasi

Menurut Walpole (1995: 370), koefisien korelasi  $\rho_{ik}$  mengukur kekuatan hubungan linear antara variabel random  $X_i$  dan  $X_k$  didefinisikan sebagai

$$\rho_{ik} = \frac{\sigma_{ik}}{\sqrt{\sigma_{ii}\sigma_{kk}}} \quad (2.8)$$

Matriks korelasi berukuran  $p \times p$  merupakan matriks simetris dapat ditulis sebagai berikut:

$$\boldsymbol{\rho} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_{11}}{\sqrt{\sigma_{11}\sqrt{\sigma_{11}}} & \frac{\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{11}\sqrt{\sigma_{22}}} & \cdots & \frac{\sigma_{1p}}{\sqrt{\sigma_{11}\sqrt{\sigma_{pp}}} \\ \frac{\sigma_{21}}{\sqrt{\sigma_{22}\sqrt{\sigma_{11}}} & \frac{\sigma_{22}}{\sqrt{\sigma_{22}\sqrt{\sigma_{22}}} & \cdots & \frac{\sigma_{2p}}{\sqrt{\sigma_{22}\sqrt{\sigma_{pp}}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\sigma_{p1}}{\sqrt{\sigma_{pp}\sqrt{\sigma_{11}}} & \frac{\sigma_{p2}}{\sqrt{\sigma_{pp}\sqrt{\sigma_{11}}} & \cdots & \frac{\sigma_{pp}}{\sqrt{\sigma_{pp}\sqrt{\sigma_{pp}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1p} \\ \rho_{21} & 1 & \cdots & \rho_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{p1} & \rho_{p2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$



Dalam lambang matriks menjadi

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1p} \\ 1 & X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Persamaan di atas juga dapat ditulis secara sederhana

$$Y = X\beta + \varepsilon \quad (2.13)$$

keterangan:

**Y** adalah vektor pengamatan variabel dependen yang berukuran  $n \times 1$

**X** adalah variabel independen yang berukuran  $n \times (p + 1)$

**$\beta$**  adalah vector koefisien variabel independen yang berukuran  $(p + 1) \times 1$

**$\varepsilon$**  adalah vektor galat yang berukuran  $n \times 1$

$i : 1, 2, \dots, n$  menunjukkan banyaknya pengamatan

Asumsi-asumsi regresi linear klasik adalah sebagai berikut:

1. Nilai harapan dari galat adalah nol,  $E(\varepsilon_i) = 0$  dan variansi galat sama yaitu merupakan nilai konstan sebesar  $\sigma^2$
2. Galat berdistribusi normal dengan rata-rata nol dan variansi  $\sigma^2$ ,  $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$
3. Tidak terjadi korelasi antar galat sehingga kovariannya adalah nol,  $cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0, i \neq j$
4. Tidak terjadi korelasi antara variabel bebas X atau tidak terdapat multikolinearitas antara variabel bebas X

### E. Metode *Ordinary Least Square*

Metode *Ordinary Least Square* (OLS) adalah suatu metode yang digunakan untuk menduga koefisien regresi klasik dengan cara meminimumkan jumlah kuadrat galat yaitu meminimumkan  $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2$

Estimator dalam metode OLS diperoleh dengan cara meminimumkan

$$\sum \varepsilon_i^2 = \sum (Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_{i1} - \beta_2 X_{i2} - \dots - \beta_k X_{ip})^2 \quad (2.14)$$

dengan  $\sum \varepsilon_i^2$  adalah jumlah kuadrat galat (JKG).

Pada notasi matriks jumlah kuadrat galat,  $\sum \varepsilon_i^2$  dapat dituliskan sebagai

$$\varepsilon_i' \varepsilon_i = [\varepsilon_1 \ \varepsilon_2 \ \dots \ \varepsilon_n] \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_n^2 = \sum \varepsilon_i^2 \quad (2.15)$$

Berdasarkan (2.12) diperoleh

$$\varepsilon = Y - X\beta \quad (2.16)$$

Oleh karena itu, perkalian matriks galat menjadi

$$\begin{aligned} J = \varepsilon_i' \varepsilon_i &= (Y - X\beta)'(Y - X\beta) \\ &= (Y' - \beta'X')(Y - X\beta) \\ &= Y'Y - Y'X\beta - \beta'X'Y + \beta'X'X\beta \\ &= Y'Y - 2Y'X\beta + \beta'X'X\beta \end{aligned} \quad (2.17)$$

Untuk meminimumkan  $\varepsilon_i' \varepsilon_i$ , maka  $\varepsilon_i' \varepsilon_i$  diturunkan terhadap  $\beta$  sehingga diperoleh persamaan normal.

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \beta_0} &= -2 \sum (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_{i1} - \beta_2 x_{i2} - \dots - \beta_p x_{ip}) = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial \beta_1} &= -2 \sum (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_{i1} - \beta_2 x_{i2} - \dots - \beta_p x_{ip}) x_{i1} = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial J}{\partial \beta_2} = -2 \sum (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_{i1} - \beta_2 x_{i2} - \dots - \beta_p x_{ip}) x_{i2} = 0$$

.....

$$\frac{\partial J}{\partial \beta_p} = -2 \sum (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_{i1} - \beta_2 x_{i2} - \dots - \beta_p x_{ip}) x_{ip} = 0$$

Setelah disusun kembali dan mengganti semua parameter dengan estimatornya, sistem persamaan ini dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned} n\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sum X_{i1} + \hat{\beta}_2 \sum X_{i2} + \dots + \hat{\beta}_k \sum X_{ik} &= \sum Y_i \\ \hat{\beta}_0 \sum X_{i1} + \hat{\beta}_1 \sum X_{i1}^2 + \hat{\beta}_2 \sum X_{i2} X_{i1} + \dots + \hat{\beta}_k \sum X_{ik} X_{i1} &= \sum Y_i X_{i1} \\ \hat{\beta}_0 \sum X_{i2} + \hat{\beta}_1 \sum X_{i1} X_{i2} + \hat{\beta}_2 \sum X_{i2}^2 + \dots + \hat{\beta}_k \sum X_{ik} X_{i2} &= \sum Y_i X_{i2} \\ \dots & \\ \hat{\beta}_0 \sum X_{ik} + \hat{\beta}_1 \sum X_{i1} X_{ik} + \hat{\beta}_2 \sum X_{i2} X_{ik} + \dots + \hat{\beta}_k \sum X_{ik}^2 &= \sum Y_i X_{ik} \end{aligned}$$

Persamaan tersebut disebut persamaan normal. Jika ditulis dalam lambang matriks maka bentuknya menjadi

$$\begin{matrix} \begin{bmatrix} n & \sum X_{i1} & \sum X_{i2} & \dots & \sum X_{ik} \\ \sum X_{i1} & \sum X_{i1}^2 & \sum X_{i2} X_{i1} & \dots & \sum X_{ik} X_{i1} \\ \sum X_{i2} & \sum X_{i1} X_{i2} & \sum X_{i2}^2 & \dots & \sum X_{ik} X_{i2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum X_{ik} & \sum X_{i1} X_{ik} & \sum X_{i2} X_{ik} & \dots & \sum X_{ik}^2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_{11} & x_{21} & \dots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \dots & x_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1k} & x_{2k} & \dots & x_{nk} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} \\ \mathbf{(X'X)} & \hat{\boldsymbol{\beta}} & & \mathbf{X'} & \mathbf{Y} \end{matrix}$$

atau secara lengkap jika ditulis dalam notasi matriks menjadi

$$\begin{aligned} (\mathbf{X'X})\hat{\boldsymbol{\beta}} &= \mathbf{X'Y} \\ (\mathbf{X'X})^{-1}(\mathbf{X'X})\hat{\boldsymbol{\beta}} &= (\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'Y} \\ \mathbf{I}\hat{\boldsymbol{\beta}} &= (\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'Y} \\ \hat{\boldsymbol{\beta}} &= (\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'Y} \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh estimator untuk OLS yaitu

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y \quad (2.18)$$

### 1. Sifat-sifat estimator metode *Ordinary Least Square* (OLS)

Berdasarkan asumsi-asumsi dari model regresi linear klasik, estimator OLS memiliki variansi yang minimum di antara estimator-estimator tak bias lainnya sehingga estimator OLS disebut sebagai estimator tak bias linear terbaik (*best linear unbiased estimators* / BLUE). Berikut pembuktian dari sifat BLUE estimator OLS (Gujarati ,2004 : 957):

#### a. Linear

Estimator yang diperoleh dengan metode *Ordinary Least Square* adalah linear

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$$

Karena  $(X'X)^{-1}X'$  merupakan matriks dengan bilangan tetap ,  $\hat{\beta}$  adalah fungsi linear dari  $Y$ .

#### b. Tak Bias (*Unbiased*)

$$\begin{aligned} E(\hat{\beta}) &= E[(X'X)^{-1}X'Y] \\ &= E[(X'X)^{-1}X'(X\beta + \varepsilon)] \\ &= E[(X'X)^{-1}X'X\beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon] \\ &= E[I\beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon] \\ &= E(\beta) + E((X'X)^{-1}X'\varepsilon) \\ &= \beta + (X'X)^{-1}X'E(\varepsilon) = \beta + 0 = \beta \end{aligned}$$

Jadi  $\hat{\beta}$  merupakan estimator tak bias dari  $\beta$ .

## c. Variansi minimum

Cara menunjukkan bahwa semua  $\beta_i$  dalam vektor  $\hat{\beta}$  adalah penaksir-penaksir terbaik (*best estimator*), harus dibuktikan bahwa  $\hat{\beta}$  mempunyai variansi yang terkecil atau minimum diantara variansi estimator tak bias linear yang lain.

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(\hat{\beta}) &= E[(\hat{\beta} - \beta)^2] \\
 &= E[(\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)'] \\
 &= E\{[(X'X)^{-1}X'\varepsilon]\{[(X'X)^{-1}X'\varepsilon]'\} \\
 &= E[(X'X)^{-1}X'\varepsilon\varepsilon'X(X'X)^{-1}] \\
 &= (X'X)^{-1}X'E[\varepsilon\varepsilon']X(X'X)^{-1} \\
 &= (X'X)^{-1}X'\sigma^2IX(X'X)^{-1} \\
 &= \sigma^2(X'X)^{-1}X'X(X'X)^{-1} \\
 &= \sigma^2(X'X)^{-1}
 \end{aligned}$$

Akan ditunjukkan  $\text{var}(\hat{\beta}) \leq \text{var}(\hat{\beta}^*)$

Misal  $\hat{\beta}^*$  adalah estimator linear yang lain dari  $\beta$  yang dapat ditulis sebagai

$$\hat{\beta}^* = [(X'X)^{-1}X' + c]Y$$

dengan  $c$  adalah matriks konstanta, sehingga

$$\begin{aligned}
 \hat{\beta}^* &= [(X'X)^{-1}X' + c]Y \\
 &= [(X'X)^{-1}X' + c](X\beta + \varepsilon) \\
 &= (X'X)^{-1}X'X\beta + cX\beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon + c\varepsilon \\
 &= I\beta + cX\beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon + c\varepsilon \\
 &= \beta + cX\beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon + c\varepsilon
 \end{aligned}$$

Karena diasumsikan  $\hat{\beta}^*$  merupakan estimator tak bias dari  $\beta$  maka  $E(\hat{\beta}^*)$  seharusnya  $\beta$ , dengan kata lain  $cX\beta$  seharusnya merupakan matriks nol, atau  $cX = 0$ .

Jadi diperoleh  $\hat{\beta}^* - \beta = (X'X)^{-1}X'\varepsilon + c\varepsilon = ((X'X)^{-1}X' + c)\varepsilon$

$$\begin{aligned} var(\hat{\beta}^*) &= E[(\hat{\beta}^* - \beta)(\hat{\beta}^* - \beta)'] \\ &= E[(X'X)^{-1}X' + c)\varepsilon\varepsilon'(X(X'X)^{-1} + c')] \\ &= ((X'X)^{-1}X' + c)E(\varepsilon\varepsilon')(X(X'X)^{-1} + c') \\ &= \sigma^2((X'X)^{-1}X' + c)(X(X'X)^{-1} + c') \\ &= \sigma^2((X'X)^{-1}X'X(X'X)^{-1} + cX(X'X)^{-1} + (X'X)^{-1}X'c' + cc') \\ &= \sigma^2((X'X)^{-1} + cc') \\ &= var(\hat{\beta}) + \sigma^2 cc' \end{aligned}$$

Persamaan di atas menunjukkan bahwa matriks variansi estimator linear tak bias  $\hat{\beta}^*$  merupakan penjumlahan matriks variansi estimator OLS dengan  $\sigma^2 cc'$ . Secara matematis jadi terbukti bahwa  $var(\hat{\beta}) \leq var(\hat{\beta}^*)$ .

## 2. Uji Signifikansi Regresi Linear Ganda

Berikut ini akan dibahas mengenai uji dalam regresi linear ganda yang meliputi uji signifikansi parameter serempak dan uji signifikansi parameter parsial.

a. Uji Signifikansi Parameter Model Regresi Linear Ganda

Setelah didapatkan model regresi linear maka harus dilakukan pengujian signifikansi koefisien parameter secara serentak, yaitu apakah variabel-variabel independen berpengaruh terhadap variabel dependen dengan hipotesis:

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_p = 0$$

$$H_1 : \exists \beta_j \neq 0, j = 1, 2, \dots, p$$

atau

$H_0$  : Tidak ada pengaruh secara signifikan antara variabel independen X terhadap variabel dependen Y

$H_1$  : Terdapat pengaruh secara signifikan antara variabel independen X terhadap variabel dependen Y

Menurut Neter (1996: 226), uji signifikansi parameter model regresi linear menggunakan statistik uji  $F$  dengan rumus:

$$F = \frac{KTR}{KTG}$$

Keterangan:

$$KTR = \frac{JKR}{p} = \frac{\sum(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{p}$$

$$KTG = \frac{JKG}{n - p - 1} = \frac{\sum(Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n - p - 1}$$

Kriteria keputusan

Tolak  $H_0$  jika  $F \text{ hitung} > F_{\alpha(p, n-p-1)}$

### b. Uji Signifikansi Parameter Parsial

Uji signifikansi parameter parsial digunakan untuk menguji apakah variabel independen (X) yang terdapat dalam persamaan regresi secara individu berpengaruh terhadap variabel dependen (Y) dengan hipotesis:

$$H_0 : \beta_j = 0$$

$$H_1 : \beta_j \neq 0, j = 1, 2, 3, \dots, p$$

Menurut Neter (1996: 228), uji signifikansi parameter parsial menggunakan statistik uji  $t$  dengan rumus:

$$t = \frac{\hat{\beta}_j}{s\{\hat{\beta}_j\}}$$

Keterangan:

$s\{\hat{\beta}_j\}$  diperoleh dari unsur diagonal utama matriks variansi-kovariansi  $S^2\{\hat{\beta}\}$

$$S^2\{\hat{\beta}\} = KTG(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} s^2\{\hat{\beta}_0\} & s\{\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1\} & \cdots & s\{\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_p\} \\ s\{\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_0\} & s^2\{\hat{\beta}_1\} & \cdots & s\{\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_p\} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s\{\hat{\beta}_p, \hat{\beta}_0\} & s\{\hat{\beta}_p, \hat{\beta}_1\} & \cdots & s^2\{\hat{\beta}_p\} \end{bmatrix}$$

Kriteria keputusan

Tolak  $H_0$  jika  $|t| < t_{\frac{\alpha}{2}}(n - p - 1)$

### 3. Uji Asumsi Regresi Linear

Regresi linear menggunakan metode OLS akan menghasilkan estimasi parameter yang sah jika memenuhi asumsi galat berdistribusi normal, galat bersifat saling bebas dan variansi galat konstan. Apabila seluruh asumsi klasik

tersebut telah terpenuhi maka akan menghasilkan estimator yang *best, linear, unbiased estimators* (BLUE).

a. Galat Berdistribusi Normal

Galat berdistribusi normal dapat dideteksi melalui plot peluang kenormalan residual (P-P plot). Plot residual yang mengikuti garis lurus (arah garis diagonal) mengindikasikan bahwa galat berdistribusi normal. Selain menggunakan plot dapat digunakan uji Kolmogorov-Smirnov untuk mendeteksi kenormalan distribusi galat. Hipotesis yang diuji adalah sebagai berikut :

$$H_0 : F(x) = F_0(x) \text{ untuk semua nilai } x \text{ (galat berdistribusi normal)}$$

$$H_0 : F(x) \neq F_0(x) \text{ untuk sekurang-kurangnya nilai } x \text{ (galat tidak berdistribusi normal).}$$

Statistik uji yang digunakan :

$$D = \text{maksimum} |S(x) - F_0(x)|$$

keterangan:  $S(x)$  : sebaran kumulatif sampel.

$F_0(x)$  : sebaran kumulatif normal.

Galat menyebar normal pada taraf nyata  $\alpha$  jika nilai  $D < D_{(\alpha, n)}$  pada tabel kritis uji Kolmogorov-Smirnov atau nilai- $p$  lebih besar daripada taraf nyata (Siegel, 1994:59).

b. Galat Bersifat Saling Bebas

Galat bersifat saling bebas atau tidak terjadi autokorelasi apabila galat pada periode tertentu tidak berkorelasi dengan galat pada periode lain. Galat yang saling berkorelasi (autokorelasi) dapat menimbulkan adanya bias pada hasil

regresi. Autokorelasi sering ditemukan pada regresi yang menggunakan data *time series* atau berdasarkan waktu berkala.

Galat saling bebas dapat dideteksi melalui plot antara nilai prediksi dan residual. Apabila plot tersebut akan berfluktuasi di sekitar nilai nol maka galat bersifat saling bebas. Selain menggunakan plot, deteksi adanya autokorelasi model regresi dilakukan menggunakan uji Durbin-Watson (D-W). Statistik Durbin Watson dirumuskan sebagai berikut:

$$d = \frac{\sum_{i=2}^n (e_i - e_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^n e_i^2}$$

Kriteria yang digunakan untuk mendeteksi ada tidaknya gejala autokorelasi disajikan dalam tabel kriteria autokorelasi Durbin-Watson sebagai berikut :

Tabel 2.1. Kriteria Keputusan Uji Durbin-Watson

$0 < d \leq d_L$	Ada autokorelasi positif
$d_L < d \leq d_U$	Tidak ada keputusan
$d_U < d \leq 4 - d_U$	Tidak ada autokorelasi
$4 - d_U < d \leq 4 - d_L$	Tidak ada keputusan
$4 - d_L < d \leq 4$	Ada autokorelasi negatif

(Gujarati, 2004 : 469)

c. Variansi Galat Konstan (Homoskedastisitas)

Asumsi lain berkaitan dengan galat yang harus dipenuhi adalah galat harus memiliki variansi yang konstan (homoskedastisitas). Kehomogenan ragam galat dapat dideteksi melalui plot antara nilai prediksi dengan residual. Jika plot tidak

memiliki pola maka ragam sisaan bersifat homogen (memiliki ragam yang konstan). Tetapi jika plot menunjukkan suatu pola tertentu maka ragam sisaan tidak homogen.

#### F. Metode *Generalized Least Square*

Asumsi-asumsi dalam model regresi linear  $Y = X\beta + \epsilon$  antara lain tidak adanya autokorelasi yaitu  $E(\epsilon) = 0$  dan homoskedasitas yaitu  $Var(\epsilon) = \sigma^2 I$ . Apabila asumsi-asumsi mengenai tidak adanya autokorelasi dan homoskedasitas tidak terpenuhi, maka metode *Ordinary Least Square* (OLS) tidak lagi tepat digunakan untuk mengestimasi parameter pada model regresi linear. Metode *Generalized Least Square* (GLS) dapat digunakan untuk mengestimasi parameter ketika model regresi linear berbentuk:

$$Y = X\beta + \epsilon$$

dengan  $E(\epsilon) = 0$ ,  $Var(\epsilon) = \sigma^2 V$  dan  $V$  merupakan matriks berukuran  $n \times n$ .

Pelanggaran asumsi tidak adanya autokorelasi dan homoskedasitas akan diselesaikan dengan mentransformasi data pengamatan model regresi sehingga memenuhi asumsi-asumsi metode *ordinary least square*. Matriks kovariansi galat berbentuk  $\sigma^2 V$  dengan  $V$  merupakan matriks nonsingular dan definit positif sehingga terdapat matriks  $K$  simetrik non singular berukuran  $n \times n$  dengan  $K'K = KK = V$ .

Didefinisikan variabel-variabel baru sebagai berikut,

$$Y^* = K^{-1}Y, \quad X^* = K^{-1}X, \quad \epsilon^* = K^{-1}\epsilon,$$

sehingga model regresi  $Y = X\beta + \epsilon$  menjadi  $K^{-1}Y = K^{-1}X\beta + K^{-1}\epsilon$  atau

$$Y^* = X^* \beta + \varepsilon^*$$

Galat pada model yang ditransformasi memiliki nilai harapan nol, yaitu

$$E(\varepsilon^*) = K^{-1}E(\varepsilon) = 0$$

Dengan demikian, matriks kovariansi dari  $\varepsilon^*$  dapat ditulis sebagai berikut

$$\begin{aligned} \text{Var}(\varepsilon^*) &= E\{[\varepsilon^* - E(\varepsilon^*)][\varepsilon^* - E(\varepsilon^*)]'\} \\ &= E(\varepsilon^* \varepsilon^{*'}) \\ &= E(K^{-1} \varepsilon \varepsilon' K^{-1}) \\ &= K^{-1} E(\varepsilon \varepsilon') K^{-1} && \text{berdasarkan sifat (2.6)} \\ &= \sigma^2 K^{-1} V K^{-1} \\ &= \sigma^2 K^{-1} K K K^{-1} \\ &= \sigma^2 I \end{aligned}$$

Setelah ditransformasi ternyata model regresi memenuhi asumsi regresi klasik tidak adanya autokorelasi yaitu  $E(\varepsilon^*) = 0$  dan homoskedastisitas yaitu  $\text{Var}(\varepsilon^*) = \sigma^2 I$ . Dengan demikian dapat digunakan langkah-langkah pada metode OLS untuk mencari parameter model regresi metode GLS.

Akan dicari estimator dari parameter yang meminimumkan bentuk kuadrat

$$S(\beta) = \varepsilon^{*'} \varepsilon^* = (Y^* - X^* \beta)' (Y^* - X^* \beta)$$

Analogi dengan metode OLS, diperoleh persamaan normal metode GLS dalam lambang matriks berbentuk :

$$\begin{aligned} (X^{*'} X^*) \hat{\beta} &= X^{*'} Y^* \\ ((K^{-1} X)' (K^{-1} X)) \hat{\beta} &= (K^{-1} X)' K^{-1} Y \\ (X' (K' K)^{-1} X) \hat{\beta} &= X' (K' K)^{-1} Y \\ (X' V^{-1} X) \hat{\beta} &= X' V^{-1} Y \\ (X' V^{-1} X)^{-1} (X' V^{-1} X) \hat{\beta} &= (X' V^{-1} X)^{-1} X' V^{-1} Y \end{aligned}$$

$$I\hat{\beta} = (X'V^{-1}X)^{-1} X'V^{-1}Y$$

$$\hat{\beta} = (X'V^{-1}X)^{-1} X'V^{-1}Y,$$

sehingga diperoleh estimator untuk GLS yaitu

$$\hat{\beta}_{GLS} = (X'V^{-1}X)^{-1} X'V^{-1}Y$$

$$\text{dengan } \text{Var}(\hat{\beta}_{GLS}) = \sigma^2((K^{-1}X)'(K^{-1}X))^{-1}$$

$$= \sigma^2(X'(K'K)^{-1}X')^{-1}$$

$$= \sigma^2(X'V^{-1}X)^{-1}$$

Sifat-sifat estimator metode *Generalized Least Square* (GLS)

#### 1. Linear

Estimator yang diperoleh dengan metode *Generalized Least Square* adalah linear

$$\hat{\beta}_{GLS} = (X'V^{-1}X)^{-1} X'V^{-1}Y$$

$\hat{\beta}$  adalah fungsi linear dari  $Y$ .

#### 2. Tak Bias (*Unbiased*)

$$\begin{aligned} E(\hat{\beta}_{GLS}) &= E \left[ (X'V^{-1}X)^{-1} X'V^{-1}Y \right] \\ &= E \left[ (X'V^{-1}X)^{-1} X'V^{-1}(X\beta + \varepsilon) \right] \\ &= E \left[ (X'V^{-1}X)^{-1} X'V^{-1}X\beta + (X'V^{-1}X)^{-1} X'V^{-1}\varepsilon \right] \\ &= E \left[ I\beta + (X'V^{-1}X)^{-1} X'V^{-1}\varepsilon \right] \\ &= E(\beta) + E \left( (X'V^{-1}X)^{-1} X'V^{-1}\varepsilon \right) \\ &= \beta + (X'V^{-1}X)^{-1} X'V^{-1}E(\varepsilon) = \beta + 0 = \beta \end{aligned}$$

Jadi  $\hat{\beta}_{GLS}$  merupakan estimator tak bias dari  $\beta$ .

### 3. Variansi minimum

Cara menunjukkan bahwa semua  $\beta_i$  dalam vektor  $\hat{\beta}$  adalah estimator-estimator terbaik (*best estimator*), harus dibuktikan bahwa  $\hat{\beta}$  mempunyai variansi yang terkecil atau minimum diantara variansi estimator tak bias linear yang lain.

$$\text{Var}(\hat{\beta}) = \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}$$

Akan ditunjukkan  $\text{var}(\hat{\beta}_{GLS}) \leq \text{var}(\hat{\beta}^*)$

Misal  $\hat{\beta}^*$  adalah alternatif linear estimator dari  $\beta$  yang dapat ditulis sebagai

$$\hat{\beta}^* = [(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1} + \mathbf{c}]\mathbf{Y}$$

dengan  $\mathbf{c}$  adalah matriks konstanta yang diketahui

$$\begin{aligned} \hat{\beta}^* &= [(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1} + \mathbf{c}]\mathbf{Y} \\ &= [(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1} + \mathbf{c}](\mathbf{X}\beta + \varepsilon) \\ &= (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}\beta + \mathbf{cX}\beta + (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\varepsilon + \mathbf{c}\varepsilon \\ &= \mathbf{I}\beta + \mathbf{cX}\beta + (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\varepsilon + \mathbf{c}\varepsilon \\ &= \beta + \mathbf{cX}\beta + (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\varepsilon + \mathbf{c}\varepsilon \end{aligned}$$

Karena diasumsikan  $\hat{\beta}^*$  merupakan estimator tak bias dari  $\beta$  maka  $E(\hat{\beta}^*)$  seharusnya  $\beta$ . Dengan kata lain,  $\mathbf{cX}\beta$  seharusnya merupakan matriks nol atau  $\mathbf{cX} = 0$ .

$$\begin{aligned} \hat{\beta}^* - \beta &= [(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1} + \mathbf{c}]\mathbf{Y} - \beta \\ &= [(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1} + \mathbf{c}](\mathbf{X}\beta + \varepsilon) - \beta \\ &= (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}\beta - \beta + (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\varepsilon + \mathbf{cX}\beta + \mathbf{c}\varepsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= I\beta - \beta + (X'V^{-1}X)^{-1} X'V^{-1}\varepsilon + c\varepsilon \\
&= (X'V^{-1}X)^{-1} X'V^{-1}\varepsilon + c\varepsilon \\
&= [(X'V^{-1}X)^{-1} X'V^{-1} + c]\varepsilon
\end{aligned}$$

Jadi diperoleh  $\widehat{\beta}^* - \beta = (X'V^{-1}X)^{-1} X'V^{-1}\varepsilon + c\varepsilon = ((X'V^{-1}X)^{-1} X'V^{-1} + c)\varepsilon$

$$\begin{aligned}
var(\widehat{\beta}^*) &= E[(\widehat{\beta}^* - \beta)(\widehat{\beta}^* - \beta)'] \\
&= E((X'V^{-1}X)^{-1} X'V^{-1} + c)\varepsilon\varepsilon'((X'V^{-1}X)^{-1} X'V^{-1} + c)'] \\
&= ((X'V^{-1}X)^{-1} X'V^{-1} + c)E(\varepsilon\varepsilon')((X'V^{-1}X)^{-1} X'V^{-1} + c)' \\
&= ((X'V^{-1}X)^{-1} X'V^{-1} + c)(\sigma^2V)((X'V^{-1}X)^{-1} X'V^{-1} + c)' \\
&= \sigma^2((X'V^{-1}X)^{-1} X'V^{-1}V((X'V^{-1}X)^{-1} X'V^{-1})' + \\
&\quad ((X'V^{-1}X)^{-1} X'V^{-1}Vc' + cV((X'V^{-1}X)^{-1} X'V^{-1})' + cVc') \\
&= \sigma^2((X'V^{-1}X)^{-1} + cVc') \\
&= var(\widehat{\beta}_{GLS}) + \sigma^2cVc'
\end{aligned}$$

Persamaan di atas menunjukkan bahwa matriks variansi estimator alternatif linear tak bias  $\widehat{\beta}^*$  merupakan penjumlahan matriks variansi estimator GLS dengan  $\sigma^2cVc'$ . Secara matematis jadi terbukti bahwa  $var(\widehat{\beta}_{GLS}) \leq var(\widehat{\beta}^*)$ .