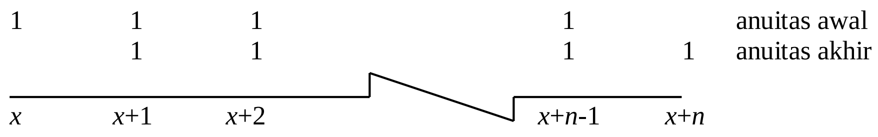
ANUITAS (Bagian 2)

c. Anuitas Berjangka

Anuitas berjangka adalah rangkaian pembayaran berkala paling lama n tahun. Jika nilai tunai anuitas akhir bagi seorang berusia x dengan pembayaran paling lama n tahun ditulis dengan simbol $a_{x:n}$. Sedangkan nilai tunai anuitas awal bagi seorang berusia x dengan pembayaran paling lama n tahun ditulis dengan simbol $\ddot{a}_{x:n}$, maka diperoleh hubungan antara $a_{x:n}$ dan $\ddot{a}_{x:n}$ seperti terlihat pada gambar berikut



Gambar 3

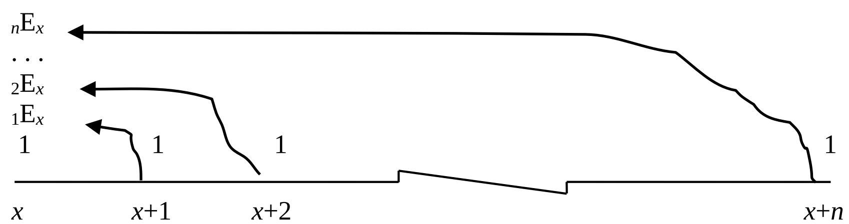
Jadi hubungan antara $a_{x:n}$ dan $\ddot{a}_{x:n}$ adalah

$$\ddot{a}_{x:n} = 1 + a_{x:n-1} \qquad (3.5)$$

$a_{x:n}$ ini dapat dipandang sebagai jumlahan dari endowmen murni tiap tahun bagi orang berusia x selama n tahun, yaitu

$$a_{x:n} = {}_1E_x + {}_2E_x + \ldots + {}_nE_x$$

Jika digambarkan adalah sebagai berikut



Gambar 4

Sehingga

$$a_{x:n} = \frac{D_{x+1}}{D_x} + \frac{D_{x+2}}{D_x} + \ldots + \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

$$= \frac{D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots + D_{x+n}}{D_x}$$

$$= \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x} \qquad (3.6)$$

Atau apabila menggunakan Gambar 3, maka

$$a_{x:n} = 1.v^1.\ {}_1p_x + 1.v^2.\ {}_2p_x + 1.v^3.\ {}_3p_x + \cdots + 1.v^n.\ {}_np_x$$

$$= \frac{v.l_{x+1}}{l_x} + \frac{v^2.l_{x+2}}{l_x} + \frac{v^3.l_{x+3}}{l_x} + \cdots + \frac{v^n.l_{x+n}}{l_x}$$

$$= \frac{v^{x+1}.l_{x+1} + v^{x+2}.l_{x+2} + v^{x+3}.l_{x+3} + \ldots + v^{x+n}.l_{x+n}}{v^x l_x}$$

$$= \frac{D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \ldots + D_{x+n}}{D_x}$$

$$= \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x} \qquad (3.6)$$

Dari (5)

$$\ddot{a}_{x:n} = 1 + a_{x:n-1}$$

$$= 1 + \frac{N_{x+1} - N_{x+n}}{D_x}$$

$$= \frac{D_x + N_{x+1} - N_{x+n}}{D_x}$$

$$= \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} \qquad (3.7)$$

Contoh 3 :

Bima berusia 35 tahun membeli anuitas berjangka dengan maksud setiap akhir tahun menerima uang sebesar 1,5 juta rupiah selama 30 tahun. Berapa besar uang yang dibayar Bima untuk membeli anuitas tersebut?

Jawab :

Besar uang yang diterima Bima tiap akhir tahun adalah 1,5 juta rupiah, maka

$$a_{35:30} = 1.500.000\,\frac{N_{36} - N_{66}}{D_{35}}$$

$$= 1.500.000\,\frac{8128447{,}43 - 1056041{,}64}{381995{,}63}$$

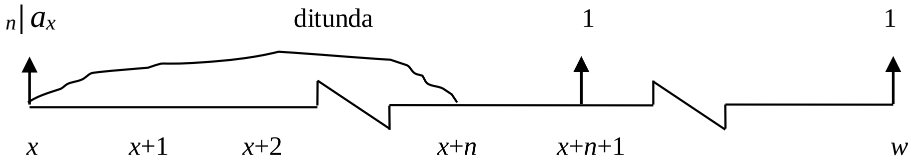
$$= 27.771.544{,}935$$

Jadi besar uang untuk membeli anuitas berjangka tersebut adalah Rp. 27.771.554,935

Apabila pada contoh Bima menerimanya pada tiap awal tahun, hitung besar uang untuk membeli anuitas tersebut.

d. Anuitas Ditunda

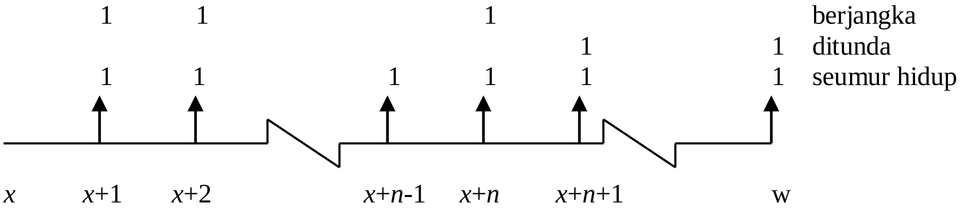
Anuitas ditunda adalah rangkaian pembayaran secara berkala yang ditunda selama jangka waktu tertentu. Nilai tunai anuitas akhir bagi seseorang berusia x ditunda n tahun dinyatakan dengan simbol ${}_{n|}a_x$. Sedangkan nilai tunai anuitas awal bagi seseorang berusia x ditunda n tahun dinyatakan dengan simbol ${}_{n|}\ddot{a}_x$



Gambar 5

Gambar 5 adalah ilustrasi dari anuitas akhir bagi seseorang yang berusia x yang pembayarannya ditunda selama n tahun. Jadi pembayaran dilakukan mulai akhir tahun ia berusia $x+n$ sampai seumur hidup.

Sedangkan hubungan antara anuitas akhir seumur hidup, anuitas akhir berjangka dan anuitas akhir tunda dapat digambarkan sebagai berikut



Gambar 6

Jika dinyatakan dalam bentuk rumus adalah

$$a_{x:n} + {}_{n|}a_x = a_x \tag{3.8}$$

Dari (8) diperoleh

$${}_{n|}a_x = a_x - a_{x:n}$$

$$= \frac{N_{x+1}}{D_x} - \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}$$

$$= \frac{N_{x+n+1}}{D_x} \tag{3.9}$$

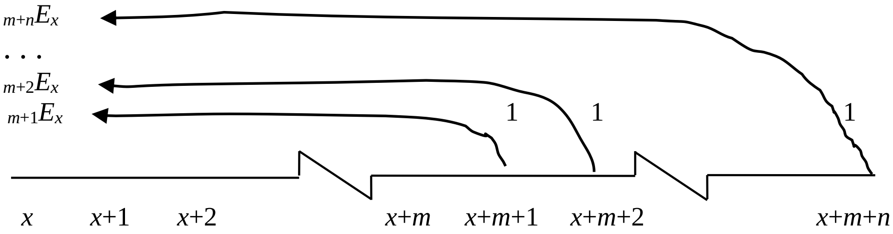
Sama seperti pada anuitas akhir, pada anuitas awalpun dapat diperoleh hubungan antara anuitas seumur hidup, anuitas berjangka dan anuitas ditunda, yaitu

$$\ddot{a}_{x:n} + {}_{n|}\ddot{a}_x = \ddot{a}_x \tag{3.10}$$

Sehingga

$$
\begin{aligned}
{}_{n|}\ddot{a}_x &= \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:n} \\
&= \frac{N_x}{D_x} - \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} \\
&= \frac{N_{x+n}}{D_x}
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

Selanjutnya nilai tunai anuitas akhir bagi seseorang berusia x ditunda m tahun pembayaran paling lama n tahun dinyatakan dengan simbol ${}_{m|n}a_x$. Dan nilai tunai anuitas awal bagi seseorang berusia x ditunda m tahun pembayaran paling lama n tahun dinyatakan dengan simbol ${}_{m|n}\ddot{a}_x$. ${}_{m|n}a_x$ ini dapat dipandang sebagai jumlahan dari endowmen murni



Gambar 7

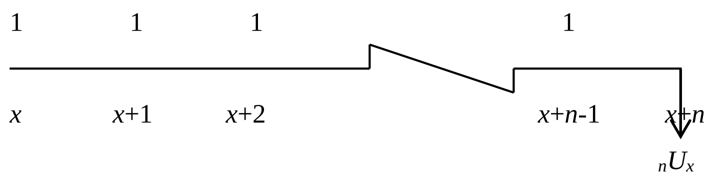
Sehingga

$$
\begin{aligned}
{}_{m|n}a_x &= {}_{m+1}E_x + {}_{m+2}E_x + \ldots + {}_{m+n}E_x \\
&= \frac{D_{x+m+1}}{D_x} + \frac{D_{x+m+2}}{D_x} + \ldots + \frac{D_{x+m+n}}{D_x} \\
&= \frac{N_{x+m+1} - N_{x+m+n+1}}{D_x}
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

$$
\begin{aligned}
{}_{m|n}\ddot{a}_x &= {}_{m-1|n}a_x \\
&= \frac{N_{x+m} - N_{x+m+n}}{D_x}
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

e. Dana Tonti

Misal sebanyak l_x orang sepakat menyumbang Rp 1 per orang ke suatu dana, setahun dari sekarang tiap orang yang masih hidup l_{x+1} menyumbang lagi Rp. 1 ke dana tersebut, 2 tahun kemudian tiap orang yang masih hidup l_{x+2} menyumbang Rp. 1 ke dana tersebut, dan seterusnya sampai sumbangan telah terkumpul sebanyak n kali (tahun). n tahun dari sekarang semua dana yang telah terkumpul (dengan bunganya) dibagi sama rata oleh l_{x+n} orang yang masih hidup, maka bila bagian tiap orang yang masih hidup disimbolkan dengan ${}_nU_x$ akan dicari nilai ${}_nU_x$ ini.



Gambar 8

$$
\begin{aligned}
{}_nU_x &= \frac{v^{-n}.l_x + v^{-(n-1)}.l_{x+1} + v^{-(n-2)}.l_{x+2} + \ldots + v^{-1}.l_{x+n-1}}{l_{x+n}} \\
&= \frac{v^{x}.l_x + v^{x+1}.l_{x+1} + v^{x+2}.l_{x+2} + \ldots + v^{x+n-1}.l_{x+n-1}}{v^{x+n} l_{x+n}} \\
&= \frac{D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots + D_{x+n-1}}{D_{x+n}} \\
&= \frac{N_x - N_{x+n}}{D_{x+n}} \qquad (3.14)
\end{aligned}
$$

Contoh 4 :

Pada saat Novi berusia 30 tahun dia membeli anuitas. Dia ingin pada waktu berusia 50 tahun tiap akhir tahun memperoleh uang sebesar Rp. 3.000.000 selama 10 tahun, maka nilai tunai yang harus dibayar Novi adalah

$$
\begin{aligned}
{}_{20|10}a_{30} &= 3.000.000\ \frac{N_{51} - N_{61}}{D_{30}} \\
&= 3.000.000\ \frac{3613562{,}55 - 1711567{,}35}{440800{,}58} \\
&= 12.944.596{,}3978
\end{aligned}
$$

Jadi Novi harus membayar sebesar Rp. 12.944.596,3978 pada waktu berusia 30 tahun agar pada waktu mulai usia 50 tahun setiap akhir tahun memperoleh uang sebesar Rp. 3.000.000 selama 10 tahun