ANUITAS (Bagian 1)

3.1 Pengertian

Anuitas adalah serangkaian pembayaran yang dilakukan dalam selang waktu yang sama. Pembayaran dapat dilakukan tiap bulan, 3 bulan, 6 bulan atau tahunan. Besar pembayaran tiap periode bisa sama yang disebut anuitas datar bisa juga tidak sama yang disebut anuitas berubah. Pada bagian ini akan dipelajari beberapa anuitas hidup dengan pembayaran datar berupa pembayaran tahunan dan pembayaran beberapa kali setahun maupun pembayaran berubah.

Anuitas hidup adalah anuitas yang pembayarannya dikaitkan dengan mati hidupnya seseorang. Pembayaran dilakukan jika orang yang memiliki anuitas masih hidup. Berdasarkan besar pembayaran anuitas hidup terdiri dari anuitas datar dan anuitas berubah. Sedangkan berdasarkan jangka waktu pembayaran anuitas hidup terdiri dari pembayaran tahunan dan pembayaran beberapa kali setahun. Beberapa macam anuitas hidup yang dipelajari adalah anuitas seumur hidup, endowmen murni, anuitas berjangka dan anuitas ditunda. Sebelum mempelajari anuitas hidup terlebih dahulu diperkenalkan simbol perantara atau simbol komutasi yang berguna untuk mempermudah perhitungan. Simbol komutasi tersebut adalah :

$D_x = v^x.l_x$

$N_x = \sum_{j=0} D_{x+j} = D_x + D_{x+1} + \ldots + \mathrm{Dw}$

$\mathrm{Sx} = \sum_{j=0} N_{x+j} = N_x + N_{x+1} + \ldots + N_w$

$= \sum_{j=0} (1+j) D_{x+j} = D_x + 2D_{x+1} + 3D_{x+2} + \ldots + D_w$

$C_x = v^{x+1}.d_x$

$M_x = \sum_{j=0} C_{x+j} = C_x + C_{x+1} + \ldots + C_w$

$R_x = \sum_{j=0} M_{x+j} = M_x + M_{x+1} + \ldots + M_w$

$= \sum_{j=0} (1+j) C_{x+j} = C_x + 2C_{x+1} + 3C_{x+2} + \ldots + C_w$

dengan $v = (1+\mathrm{i})^{-1}$, i = suku bunga (dalam persen)

l_x = jumlah orang yang tepat berusia x tahun,

d_x = jumlah orang yang meninggal antara usia x dan x+1 tahun

3.2. Anuitas Datar

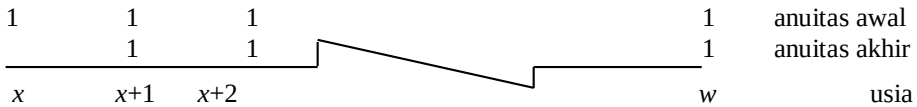
Besar pembayaran anuitas hidup yang sama tiap periode dinamakan anuitas hidup datar. Pembayaran anuitas hidup ini bisa dilakukan tahunan maupun beberapa kali setahun yang masing-masing terdiri dari anuitas seumur hidup, endowmen murni, anuitas berjangka dan anuitas ditunda.

3.2.1 Pembayaran Tahunan

Anuitas dengan pembayaran tahunan adalah anuitas dengan pembayaran sekali dalam setahun selama jangka waktu yang ditentukan.

a. Anuitas Seumur Hidup

Anuitas seumur hidup adalah rangkaian pembayaran yang dilakukan selama seseorang masih hidup pada waktu jatuhnya pembayaran. Pembayaran bisa dilakukan tiap awal tahun yang disebut anuitas awal seumur hidup maupun dilakukan tiap akhir tahun yang disebut anuitas akhir seumur hidup. Misal nilai tunai anuitas awal seumur hidup untuk seseorang yang berusia *x* disimbolkan dengan simbol $\ddot{a}_x$ dan nilai tunai anuitas akhir seumur hidup untuk seseorang yang berusia *x* disimbolkan dengan a_x, maka diperoleh hubungan antara $\ddot{a}_x$ dan a_x seperti terlihat pada Gambar 1



Gambar 1

Hubungan antara $\ddot{a}_x$ dan a_x adalah

$$\ddot{a}_x = 1 + a_x \qquad (3.1)$$

Seseorang berusia x tahun membeli anuitas seumur hidup dengan cara membayar nilai tunai sebesar a_x dengan harapan setiap akhir tahun dia akan menerima uang sebesar Rp. 1. Peluang orang tersebut hidup satu tahun lagi adalah ${}_1p_x$, sehingga jika orang tersebut mencapai usia $x + 1$ maka dia akan menerima Rp. 1 beserta bunganya sebesar $v.\ {}_1p_x$. Peluang orang tersebut hidup dua tahun lagi adalah ${}_2p_x$, jika orang tersebut mencapai usia $x + 2$ maka dia akan menerima Rp. 1 beserta bunganya sebesar $v^2.\ {}_2p_x$ dan seterusnya. Sehingga nilai tunai anuitas akhir atau premi tunggal bersih adalah

$$a_x = 1.v^1.\ {}_1p_x + 1.v^2.\ {}_2p_x + 1.v^3.\ {}_3p_x + \cdots + 1.v^{w-x}.\ {}_{w-x}p_x$$

$$= \frac{v.l_{x+1}}{l_x} + \frac{v^2.l_{x+2}}{l_x} + \frac{v^3.l_{x+3}}{l_x} + \cdots + \frac{v^{w-x}.l_w}{l_x}$$

$$= \frac{v^{x+1}.l_{x+1} + v^{x+2}.l_{x+2} + v^{x+3}.l_{x+3} + \cdots + v^w.l_w}{v^x l_x}$$

$$= \frac{D_{x+1}+D_{x+2}+D_{x+3}+\cdots+D_w}{D_x}$$

$$= \frac{N_{x+1}}{D_x} \qquad (3.2)$$

Dari (1) diperoleh nilai tunai anuitas awal

$$\ddot{a}_x = 1 + a_x$$

$$= 1 + \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

$$= \frac{D_x + N_{x+1}}{D_x}$$

$$= \frac{N_x}{D_x} \qquad (3.3)$$

Contoh 1 :

Amir pensiun pada waktu berusia 55 tahun dan menerima pesangon sebesar 40 juta rupiah. Uang ini kemudian dibelikan anuitas seumur hidup. Berapa besar penerimaan yang akan dia terima tiap awal tahun mulai usia 55 ?

Jawab :

Misal besar uang yang diterima Amir tiap awal tahun adalah B rupiah, maka

$$40.000.000 = \ddot{a}_{55}$$

$$40.000.000 = \mathrm{B}\frac{N_{55}}{D_{55}}$$

$$\mathrm{B} = 40.000.000 \left(\frac{193940{,}61}{2754768{,}79}\right)$$

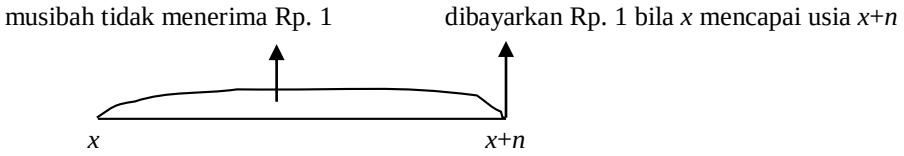
$$= 2.816.070{,}963$$

Jadi tiap awal tahun seumur hidup Amir akan menerima uang sebesar Rp. 2.816.070,963

Apabila pada contoh Amir menerimanya pada tiap akhir tahun, hitung besar uang yang diterimanya.

b. Endowmen Murni

Endowmen murni adalah suatu pembayaran yang dilakukan pada akhir suatu jangka waktu tertentu bagi seseorang bila dia hidup mencapai akhir jangka waktu tersebut. Jika orang tersebut meninggal sebelum akhir jangka waktu maka tidak ada pembayaran. Nilai tunai suatu endowmen murni yang dikeluarkan bagi seseorang yang berusia x selama jangka waktu n tahun dinyatakan dengan simbol ${}_nE_x$. Jika orang ini meninggal sebelum berusia $x+n$ tahun maka ia tidak akan menerima pembayaran, tetapi jika ia mencapai usia $x+n$ tahun ia akan menerima pembayaran sebesar Rp. 1. Sehingga jika diilustrasikan pada Gambar 2 terlihat bahwa ${}_nE_x$ seperti anuitas awal yang ditunda n tahun dan dibayarkan sekali.



Gambar 2

${}_nE_x$ adalah nilai tunai dari $1.v^n$, dengan peluang dibayarkan jika x mencapai usia $x+n$ tahun (${}_np_x$). Jadi

$$
\begin{aligned}
{}_nE_x &= v^n.{}_np_x \\
&= \frac{v^n.l_{x+n}}{l_x} \\
&= \frac{v^{x+n}.l_{x+n}}{v^x l_x} \\
&= \frac{D_{x+n}}{D_x} \qquad (3.4)
\end{aligned}
$$

Contoh 2 :

Ali usia 42 tahun membeli endowment murni dengan maksud jika dia masih hidup pada waktu berusia 60 tahun dia akan memperoleh uang sebesar 25 juta rupiah. Hitung besar uang yang harus dibayar Ali untuk membeli endowment murni tersebut.

Jawab :

Besar uang untuk membeli endowment murni tersebut adalah:

$${}_{18}E_{42} = 25.000.000\ \frac{D_{60}}{D_{42}} = 25.000.000\left(\frac{154046,23}{309145,51}\right) = 12.457.420,917$$

Contoh Soal-Soal :

1. Seorang yang berusia 27 tahun membeli anuitas seumur hidup sebesar 12 juta rupiah. Hitung berapa jumlah yang dia terima tiap awal tahun!
2. Seorang yang berusia 32 tahun membeli anuitas sebesar 15 juta rupiah. Hitung besar uang yang dia terima tiap awal tahun, jika anuitas yang dibelinya adalah anuitas seumur hidup!
3. Seorang berusia 50 tahun membeli anuitas yang akan dia peroleh tiap awal bulan sebesar 300 ribu. Hitung besar uang yang harus dia bayar jika anuitasnya seumur hidup!