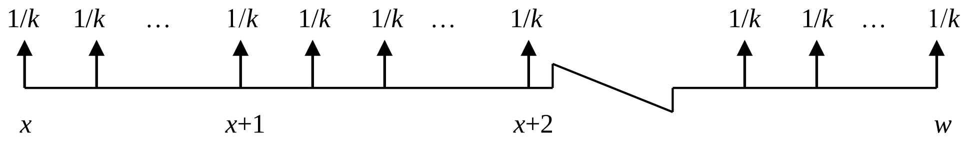
ANUITAS (Bagian 3)

3.2.2. Pembayaran Beberapa Kali Setahun

Selain pembayaran setahun sekali anuitas bisa juga dilakukan dengan pembayaran beberapa tahun sekali, misal *k* kali setahun.

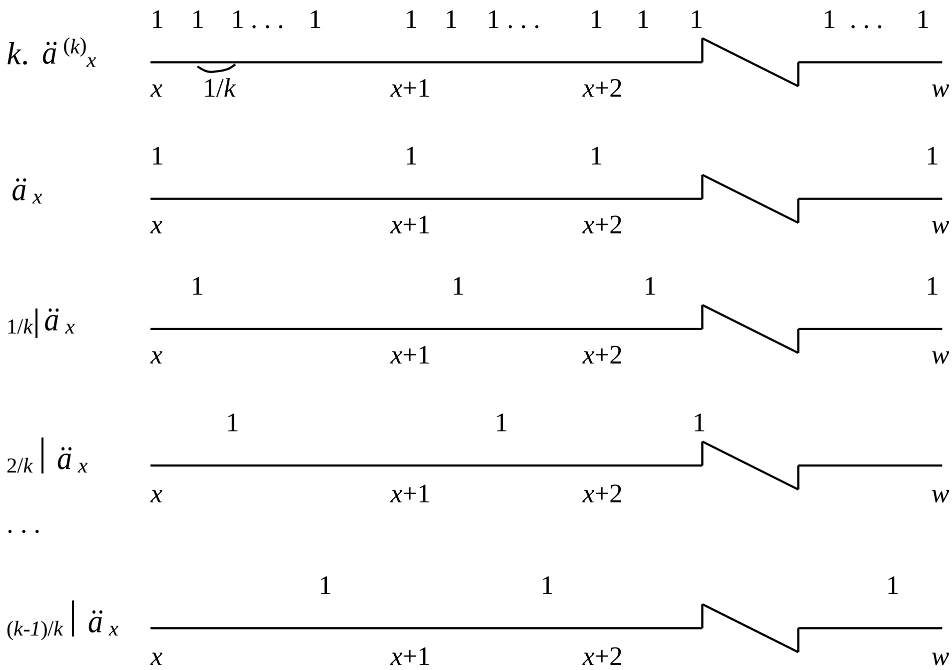
a. Anuitas Seumur Hidup

Misal $\ddot{a}^{(k)}_x$ menyatakan nilai tunai anuitas awal seumur hidup bagi seseorang berusia *x* dengan pembayaran *k* kali setahun dengan pembayaran Rp. 1 setahun. Jadi pembayaran tiap periode adalah Rp. $\frac{1}{k}$ selama seumur hidup, seperti terlihat pada gambar berikut



Gambar 9

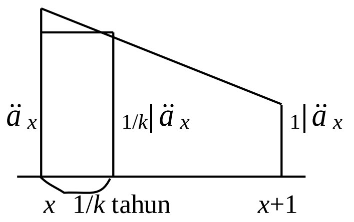
Untuk menghitung nilai tunai digunakan cara sebagai berikut



Jadi $\quad k.\ \ddot{a}^{(k)}_x = \ddot{a}_x + {}_{1/k|}\ddot{a}_x + {}_{2/k|}\ddot{a}_x + \ldots + {}_{(k-1/|k}\ddot{a}_x$ (3.15)

Untuk menghitung ruas kanan digunakan interpolasi linier, yaitu

$${}_{0|}\ddot{a}_x = \ddot{a}_x - 0, \quad {}_{1|}\ddot{a}_x = \ddot{a}_x - 1$$



Jadi $\quad {}_{1/k|}\ddot{a}_x \sim \ddot{a}_x - 1/k$

$${}_{2/k|}\ddot{a}_x \sim \ddot{a}_x - 2/k$$

$$\ldots$$

$${}_{h/k|}\ddot{a}_x \sim \ddot{a}_x - h/k$$

Sehingga (15) menjadi

$$k.\ \ddot{a}^{(k)}_x \sim \ddot{a}_x + \left(\ddot{a} - \frac{1}{k}\right) + \left(\ddot{a} - \frac{2}{k}\right) + \ldots + \left(\ddot{a} - \frac{k-1}{k}\right)$$

$$= k.\ \ddot{a}_x - \frac{1}{k}(1 + 2 + \ldots + k\text{-}1)$$

$$= k.\ \ddot{a}_x - \frac{k-1}{2}$$

Jadi $\quad \ddot{a}^{(k)}_x = \ddot{a}_x - \dfrac{k-1}{2k}$ (3.16)

Rumus ini adalah rumus hampiran

Misal $a^{(k)}_x$ menyatakan nilai tunai anuitas akhir seumur hidup bagi seseorang berusia x dengan pembayaran k kali setahun dengan pembayaran Rp. $\frac{1}{k}$ tiap periode, maka

$$a^{(k)}_x = \ddot{a}^{(k)}_x \cdot \frac{1}{k}$$

$$= \ddot{a}_x - \frac{k-1}{2k} - \frac{1}{k}$$

$$= a_x + 1 - \frac{k-1}{2k} - \frac{1}{k}$$

$$= a_x + \frac{k-1}{2k} \qquad (3.17)$$

b. Anuitas Ditunda

Misal ${}_{m|}\ddot{a}^{(k)}_x$ menyatakan nilai tunai anuitas awal seumur hidup bagi seseorang berusia x dengan pembayaran k kali setahun dengan pembayaran Rp. $\frac{1}{k}$ tiap periode ditunda m tahun dan ${}_{m|}a^{(k)}_x$ menyatakan nilai tunai anuitas akhir seumur hidup bagi seseorang berusia x dengan pembayaran k kali setahun dengan pembayaran Rp. $\frac{1}{k}$ tiap periode ditunda m tahun, maka

$$_{m|}\ddot{a}^{(k)}_x = {}_mE_x\, \ddot{a}^{(k)}_{x+m}$$

$$= {}_mE_x \left(\ddot{a}_{x+m} - \frac{k-1}{2k}\right) \quad (3.18)$$

$$_{m|}a^{(k)}_x = {}_mE_x\, a^{(k)}_{x+m}$$

$$= {}_mE_x \left(a_{x+m} + \frac{k-1}{2k}\right) \quad (3.19)$$

c. Anuitas Berjangka

Misal nilai tunai anuitas awal seumur hidup bagi seseorang berusia x dengan pembayaran k kali setahun dengan pembayaran Rp. $\frac{1}{k}$ tiap periode selama n tahun dinyatakan dengan simbol $a^{(k)}_{x:\overline{n}|}$ dan nilai tunai anuitas akhir seumur hidup bagi seseorang berusia x dengan pembayaran k kali setahun dengan pembayaran Rp. $\frac{1}{k}$ tiap periode selama n tahun dinyatakan dengan simbol $a^{(k)}_{x:\overline{n}|}$, maka

$$\ddot{a}^{(k)}_{x:n} = \ddot{a}^{(k)}_x - {}_{n|}\ddot{a}^{(k)}_x$$

$$= \ddot{a}_x - \frac{k-1}{2k} - {}_nE_x \left(\ddot{a}_{x+n} - \frac{k-1}{2k}\right)$$

$$= \ddot{a}_x - {}_nE_x\, \ddot{a}_{x+n} - \frac{k-1}{2k}(1 - {}_nE_x)$$

$$= \ddot{a}_x - {}_{n|}\ddot{a}_x - \frac{k-1}{2k}(1 - {}_nE_x)$$

$$= \ddot{a}_{x:n} - \frac{k-1}{2k}(1 - {}_nE_x) \quad (3.20)$$

Dan $\quad a^{(k)}_{x:n} = a_{x:n} + \frac{k-1}{2k}(1 - {}_nE_x) \quad (3.21)$

Contoh 7 :

Ida berusia 35 tahun membeli anuitas seumur hidup sebesar Rp. 25.000.000. Berapa yang akan diterimanya tiap akhir 3 bulan ?

Misal uang yang akan diterima Ida tiap akhir tahun adalah B, maka

$$25.000.000 = B\left(a_{35} + \frac{3}{8}\right)$$

$$25.000.000 = B\left(\frac{8510443{,}06}{381995{,}63} + \frac{3}{8}\right)$$

$$B = \frac{1.103.562{,}742}{4}$$

Jadi Ida tiap akhir 3 bulan akan menerima uang sebesar Rp. $\frac{1.103.562{,}742}{4}$ = Rp. …..

Contoh 8 :

Sugeng berusia 28 tahun. Setiap akhir bulan dia menyisihkan uangnya sebesar 100 ribu selama 22 tahun untuk membeli anuitas, supaya pada waktu pensiun yaitu usia 55 tahun setiap awal bulan akan menerima uang seumur hidup. Hitung besar uang yang akan diterimanya setiap awal bulan mulai usia 55 tahun.

Terlihat bahwa Sugeng membeli anuitas seumur hidup ditunda dengan menggunakan sistem anuitas berjangka. Misal uang yang akan diterima Sugeng tiap awal tahun adalah B, maka

Beli = Terima

$$a^{(12)}_{28:22} = {}_{27|}\ddot{a}^{(12)}_{28}$$

$$a_{28:22} + \frac{11}{24}\left(1 - {}_{22}E_{28}\right) = {}_{27}E_{28}\left(\ddot{a}_{55} - \frac{11}{24}\right)$$

$$(100.000)(12)\left\{\frac{N_{29} - N_{51}}{D_{28}} + \frac{11}{24}\left(1 - \frac{D_{50}}{D_{28}}\right)\right\} = B\left\{\frac{D_{55}}{D_{28}}\left(\frac{N_{55}}{D_{55}} - \frac{11}{24}\right)\right\}$$

$$1200000\left\{\frac{11047642{,}22 - 3613562{,}55}{466211{,}03} + \frac{11}{24}\left(1 - \frac{235925{,}04}{466211{,}03}\right)\right\} = B\left\{\frac{193940{,}61}{466211{,}03}\left(\frac{2754768{,}79}{193940{,}61} - \frac{11}{24}\right)\right\}$$

19.406.561,23 = B (5,718181622)

B = 3.393.834,354 (setiap awal tahun)

$\frac{B}{12}$ = 282.819,5295 (setiap awal bulan)

Jadi Sugeng mulai usia 55 tahun setiap awal bulan akan menerima uang sebesar 282.819,5295 rupiah seumur hidup

3.3 Anuitas Berubah

Selain anuitas dengan pembayaran sama tiap periode, pembayaran dapat dilakukan tidak sama/berubah tiap periode bisa membesar ataupun mengecil.

a. Anuitas Seumur Hidup

Misal $(I\ddot{a})_x$ menyatakan nilai tunai anuitas seumur hidup membesar bagi seseorang berusia x dengan pembayaran pertama Rp. 1, kedua Rp.2, ketiga Rp.3 dan seterusnya naik Rp1 tiap tahun seumur hidup, maka

$$(I\ddot{a})_x = 1 + 2\, v.p_x + 3\, v^2.\,{}_2p_x + \ldots + (w - x + 1)\, v^{w-x}\,{}_{w-x}p_x$$

$$= 1 + 2v\frac{l_{x+1}}{l_x} + 3v^2\frac{l_{x+2}}{l_x} + \ldots + (w - x + 1)\, v^{w-x}\frac{l_w}{l_x}$$

$$= \frac{v^x l_x}{v^x l_x} + \frac{2v^{x+1} l_{x+1}}{v^x l_x} + \frac{3v^{x+2} l_{x+2}}{v^x l_x} + \ldots + \frac{(w-x+1)v^w l_w}{v^x l_x}$$

$$= \frac{1}{D_x}\,(D_x + 2\,D_{x+1} + 3\,D_{x+2} + \ldots + (w - x + 1)\, D_w)$$

$$= \frac{1}{D_x}\{(D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots + D_w) + (D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots + D_w)$$

$$+ (D_{x+2} + \ldots + D_w) + \ldots + D_w \}$$

$$= \frac{1}{D_x}\,\{ N_x + N_{x+1} + N_{x+2} + \ldots + N_w \}$$

$$= \frac{1}{D_x}\sum_{i=0} N_{x+i} = \frac{S_x}{D_x} \qquad (3.22)$$

b. Anuitas Berjangka

Misal $(I\ddot{a})_{x:n}$ menyatakan nilai tunai anuitas membesar bagi seseorang berusia x dengan pembayaran pertama Rp. 1, kedua Rp.2, ketiga Rp.3 dan seterusnyan naik Rp1 tiap tahun sampai pembayaran ke-n sebesar Rp. n, maka

$$(I\ddot{a})_{x:n} = 1 + 2\, v.p_x + 3\, v^2.\,{}_2p_x + \ldots + n\, v^{n-1}.\,{}_{n-1}p_x$$

$$= \frac{1}{D_x}\,(D_x + 2D_{x+1} + 3D_{x+2} + \ldots + nD_{x+n-1})$$

$$= \frac{1}{D_x}\{(D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots + D_{x+n-1}) + (D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots + D_{x+n-1})$$

$$+ (D_{x+2} + \ldots + D_{x+n-1}) + \ldots + D_{x+n-1}\}$$

$$= \frac{1}{D_x}\,\{ (N_x - N_{x+n}) + (N_{x+1} - N_{x+n}) + (N_{x+2} - N_{x+n}) + \ldots + (N_{x+n-1} - N_{x+n})\}$$

$$= \frac{1}{D_x}\,\{ N_x + N_{x+1} + N_{x+2} + \ldots + N_{x+n-1} - nN_{x+n} \}$$

$$= \frac{1}{D_x}\,\{ S_x - S_{x+n} - n\, N_{x+n} \} \qquad (3.23)$$

c. Anuitas Ditunda

Misal ${}_{m|}(I\ddot{a})_x$ menyatakan nilai tunai anuitas membesar yang ditunda m tahun bagi seseorang berusia x dengan pembayaran tahun ke-$x+n$ Rp. 1, tahun ke-$x+m+1$ Rp.2, tahun ke-$x+m+2$ Rp.3 dan seterusnyan naik Rp1 tiap tahun seumur hidup, maka

$$ {}_{m|}(I\ddot{a})_x = \frac{1}{D_x}\ (D_{x+m} + 2\,D_{x+m+1} + \ldots) = \frac{S_{x+m}}{D_x} \tag{3.24}$$

Misal ${}_{m|}(I\ddot{a})_{x:n}$ menyatakan nilai tunai anuitas membesar yang ditunda m tahun bagi seseorang berusia x dengan pembayaran tahun ke-$x+m$ Rp. 1, tahun ke-$x+m+1$ Rp.2, tahun ke-$x+m+2$ Rp.3 dan seterusnya naik Rp1 tiap tahun sampai tahun ke-$x+m+n$ sebesar Rp. n, maka

$$ {}_{m|}(I\ddot{a})_{x:n} = \frac{1}{D_x}\ (D_{x+m} + 2D_{x+m+1} + \ldots + nD_{x+m+n-1})$$

$$ = \frac{1}{D_x}\ \{ S_{x+m} - S_{x+m+n} - n\, N_{x+m+n} \} \tag{3.25}$$

Soal-Soal :

1. Seorang yang berusia 27 tahun membeli anuitas seumur hidup sebesar 12 juta rupiah. Hitung berapa jumlah yang dia terima tiap :
   a. awal tahun
   b. akhir tahun
2. Seorang yang berusia 32 tahun membeli anuitas sebesar 15 juta rupiah. Hitung besar uang yang dia terima tiap awal tahun, jika anuitas yang dibelinya adalah:
   a. anuitas seumur hidup
   b. anuitas jangka waktu 30 tahun
   c. anuitas jangka waktu 20 tahun ditunda 10 tahun
   d. anuitas seumur hidup ditunda 10 tahun
3. Seorang berusia 34 tahun membeli anuitas jangka waktu 15 tahun dengan menerima sebesar 1 juta tiap akhir tahun. Hitung besar uang yang digunakan untuk membeli anuitas tersebut.
4. Seorang berusia 29 tahun membeli anuitas jangka waktu 21 tahun dengan menerima setiap akhir tahun sebesar 1,5 juta. Setelah membayar ternyata dia berubah pikiran ingin menerimanya seumur hidup tiap awal tahun. Hitung besar uang yang diterimanya tiap awal tahun seumur hidup.

5. Seorang berusia 33 tahun membeli anuitas dengan cara membayar setiap akhir tahun selama 17 tahun dengan maksud mulai usia 55 tahun (saat dia pensiun) setiap awal tahun menerima uang sebesar 2 juta. Hitung uang yang harus dibayar untuk membeli anuitas tsb.
6. Hitung jumlah uang yang akan diterima 22 tahun lagi (jika dia masih hidup) seorang berusia 28 tahun yang membeli endowment murni jangka waktu 22 tahun sebesar 30 juta rupiah.
7. Seorang berusia 38 tahun membeli endowment murni jangka waktu 22 tahun dengan cara membayar tahunan selama 7 tahun sebesar 2 juta tiap akhir tahun. Hitung besar uang yang dia terima 22 tahun lagi, jika dia masih hidup.
8. Seorang berusia 31 tahun membeli anuitas sebesar 12 juta dengan maksud mulai usia 50 tahun setiap awal tahun memperoleh uang seumur hidup. Hitung besar uang yang diperolehnya.
9. Seorang berusia 42 tahun membeli endowment murni jangka waktu 23 tahun dengan cara membayar tahunan selama 8 tahun tiap awal tahun. Jika 23 tahun lagi dia masih hidup akan menerima uang sebesar 30 juta rupiah, hitung besar uang yang dia bayar tiap awal tahun selama 8 tahun.
10. Seorang yang berusia 36 tahun membeli anuitas, dengan maksud setiap akhir tahun menerima uang sebesar 1 juta rupiah. Hitung besar uang yang dia bayar untuk membeli anuitas, jika anuitas yang dibelinya adalah:
    a. anuitas seumur hidup
    b. anuitas jangka waktu 29 tahun
    c. anuitas jangka waktu 20 tahun ditunda 8 tahun
    d. anuitas seumur hidup ditunda 8 tahun
11. Seorang berusia 50 tahun membeli anuitas yang akan dia peroleh tiap awal bulan sebesar 300 ribu. Hitung besar uang yang harus dia bayar jika anuitasnya :
    a. seumur hidup
    b. jangka waktu 27 tahun
12. Seorang berusia 40 tahun membeli anuitas sebesar 15 juta. Berapa besar uang yang akan dia peroleh setiap akhir 3 bulan mulai usia 55 tahun :
    a. seumur hidup
    b. selama 20 tahun
13. Seorang berusia 34 tahun membeli anuitas seumur hidup setiap awal semester yang akan dia terima mulai usia 55 tahun. Untuk itu dia harus membayar sebesar 300 ribu

tiap akhir 3 bulan selama 10 tahun. Hitung besar uang yang dia terima tiap awal semester seumur hidup.

14. Hitunglah nilai tunai suatu anuitas awal tahunan berjangka 10 tahun sebesar 1,2 juta tiap awal tahun dilanjutkan dengan anuitas awal seumur hidup bagi seseorang berusia 40 tahun dengan pembayaran bulanan 100 ribu.
15. Seorang berusia 24 tahun membeli anuitas seumur hidup yang akan dia terima mulai usia 50 tahun sebesar 1,5 juta rupiah setiap akhir 3 bulan. Untuk itu dia harus membayar tiap awal bulan selama 10 tahun. Hitung besar uang yang harus dia bayar setiap awal bulan.
16. Seorang berusia 27 tahun membeli anuitas jangka waktu 15 tahun sebesar 2 juta tiap awal 3 bulan dilanjutkan 800 ribu tiap awal bulan seumur hidup yang mulai diterima pada usia 45 tahun. Jia untuk membeli anuitas tersebut dia harus membayar setiap akhir bulan selama 10 tahun, hitung besar uang yang dia bayar tiap akhir bulan.
17. Seorang yang berusia 40 tahun membeli anuitas berjangka dengan pembayaran 1000000 pada waktu berusia 40 tahun, 1100000 pada waktu berusia 41 tahun dan seterusnya naik 100000 tiap tahun sampai berusia 50 tahun. Hitunglah nilai tunai anuitas tersebut.
18. X berusia 37 tahun membeli anuitas dengan maksud memperoleh uang sebesar 1,5 juta pada waktu berusia 37 tahun, 1,75 juta pada waktu berusia 38 tahun dan seterusnya naik 250 ribu tiap tahun seumur hidup. Hitunglah besar uang yang harus dibayar X untuk membeli anuitas tersebut.
19. Seorang yang berusia 35 tahun membeli anuitas berjangka dengan pembayaran 1000000 pada waktu berusia 40 tahun, 1100000 pada waktu berusia 41 tahun dan seterusnya naik 100000 tiap tahun sampai berusia 50 tahun. Hitunglah nilai tunai anuitas tersebut.
20. Sama seperti soal no 19. Jika untuk membeli anuitas tersebut dia harus membayar tiap akhir tahun selama 5 tahun, hitunglah besar uang yang harus dibayarnya tiap akhir tahun.