

Pengantar Probabilitas

Dosen : Rochdi Wasono

Program Studi Statistika
Universitas Muhammadiyah Semarang

VARIANSI

Definisi:

Jika X adalah suatu *Variabel Random Diskrit* atau *kontinyu* maka **Variansi** dari X adalah

$$\text{Var } [X] = E[X - E(X)]^2$$

atau

$$\text{Var } [X] = E[X - \mu]^2$$

Menghitung variansi dengan definisi di atas relative sukar sehingga dicari persamaannya untuk mempermudah perhitungannya

$$\begin{aligned}\text{Var}[X] &= E[X - \mu]^2 \\ &= E[X^2 - 2\mu X + \mu^2] \\ &= E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2 \\ &= E(X^2) - 2\mu \cdot \mu + \mu^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Var}[X] &= E(X^2) - \mu^2 \\ &= E(X^2) - E[X]^2 \\ &= E(X(X+1)) - E(X) - E(X)^2\end{aligned}$$

Ingat :

$$E[X] = \text{Mean} = \text{rerata} = \mu$$

Sifat Variansi:

1. Jika c adalah sebuah konstanta maka $\text{Var}(c)=0$
2. Jika X adalah variable random dan c sebuah konstanta maka
$$\text{Var}(X + c) = \text{Var}(X)$$
3. Jika a dan b dua buah konstanta dan X adalah variable random maka :

$$\text{Var}(aX + b) = a^2 \cdot \text{Var}(X)$$

Contoh :

Diberikan fungsi densitas dari variable random X adalah:

$f(X)=3X^2$ jika $0 < X < 1$ dan 0 untuk X yang lain

Hitunglah $\text{Var}[X]$

Jawab:

$$\text{Var}[X] = E[X^2] - E[X]^2$$

dicari dulu $E[X]$ dan $E[X^2]$

$$E[X] = \int_0^1 X \cdot 3X^2 dx \text{ dan } E[X^2] = \int_0^1 X^2 \cdot 3X^2 dx$$

=

Fungsi Pembangkit Momen (*Moment Generating Function /MGF*)

Definisi:

Jika X suatu variable random , baik diskrit maupun kontinyu maka Fungsi pembangkit Momen (FPM) dari X dinotasikan dengan $M_X(t)$ didefinisikan sebagai:

$$M_X(t) = E(e^{tX})$$

Kita ketahui bahwa

$$\begin{aligned} E(e^{tX}) &= \sum_X e^{tX} f(X), \text{ jika } X \text{ diskrit} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tX} f(X) dx, \text{ jika } X \text{ kontinyu} \end{aligned}$$

contoh:

Fungsi probabilitas dari variable random X berbentuk

$$f(X) = \frac{1}{4} \binom{2}{X} \quad ; X=0, 1, 2$$

Tentukan fungsi pembangkit momen

Jawab:

$$M_X(t) = E(e^{tX})$$

$$= \sum_X e^{tX} f(X) = \sum_X e^{tX} \frac{1}{4} \binom{2}{X}$$

$$= e^{t \cdot 0} \frac{1}{4} \binom{2}{0} + e^{t \cdot 1} \frac{1}{4} \binom{2}{1} + e^{t \cdot 2} \frac{1}{4} \binom{2}{2}$$

$$= \frac{1}{4} [1 + 2e^t + e^{t \cdot 2}]$$

Latihan:

1. Let X be a variable random with discrete pdf $f(X)=X/8$, jika $x=1,2,5$ and zero otherwise:

a) Find $\text{Var}[X]$; b) $\text{Var}[2X + 3]$

2. Diberikan fungsi probabilitas dari X berbentuk:

$$P(X) = 2\left(\frac{1}{3}\right)^X ; X = 1, 2, 3, \dots$$

a) Hitung $\text{Var}[X]$ b) Hitung $M_X(t)$

3. Diberikan fungsi densitas dari variable random Y berbentuk:

$$\begin{aligned} f(Y) &= (1/8)(Y+1) ; 2 < Y < 4 \\ &= 0 ; Y \text{ lainnya} \end{aligned}$$

a) Cari $\text{Var}[Y]$ b) $M_Y(t)$