

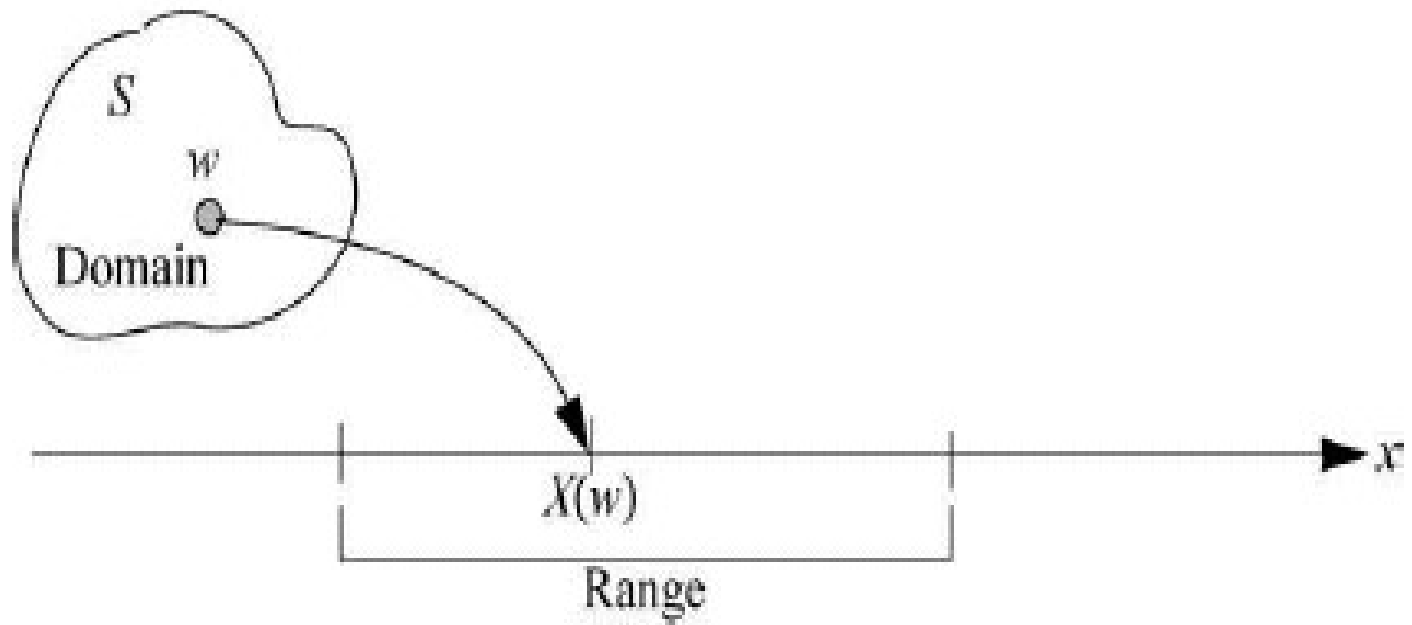
VARIABEL RANDOM (*PEUBAH ACAK*)

Dosen : Rochdi Wasono

1. Buku Referensi:
2. Lee J.Bain, Max Engelhardt, *Introduction to Probability and Mathematical Statistics*.
3. 2. Nar Herrhyanto, Tuti Gantini, Pengantar Statistika Matematis, 2009
4. 3. Pengantar Probabilitas , UT

Pengertian Variabel Acak (*Random Variable*)

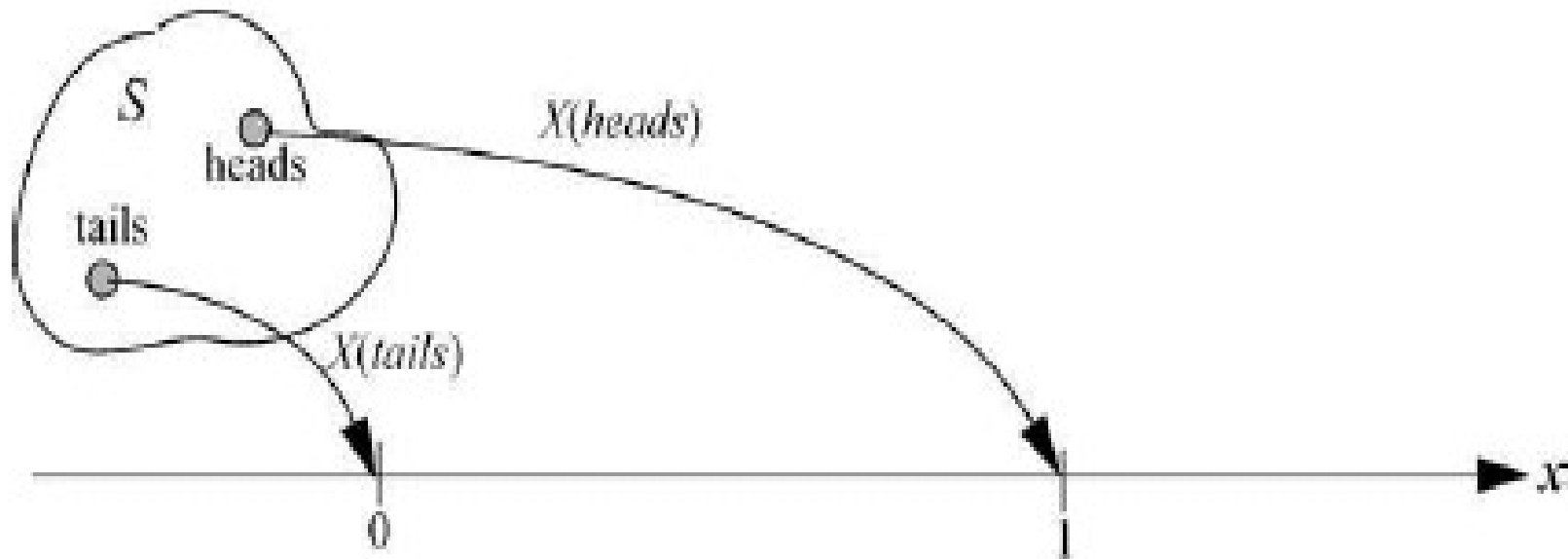
Variabel acak (*Random Variable*) adalah suatu fungsi dari ruang sampel ke suatu bilangan real



A Random Variable Associated with a Sample Point

Contoh : Melempar uang logam seimbang 1x, jk keluar Gambar disimbolkan (G): 1 dan jk keluar Angka (A) adalah 0.

Dari peristiwa ini, dapat dibangun struktur variabel random, yaitu Ruang sampel $S=\{G, A\}$, dan $X:1$ keluar gambar dan X bernilai 0, jk keluar Angka, maka $X=\{0,1\}$



Random Variable Associated with Coin-Tossing Experiment

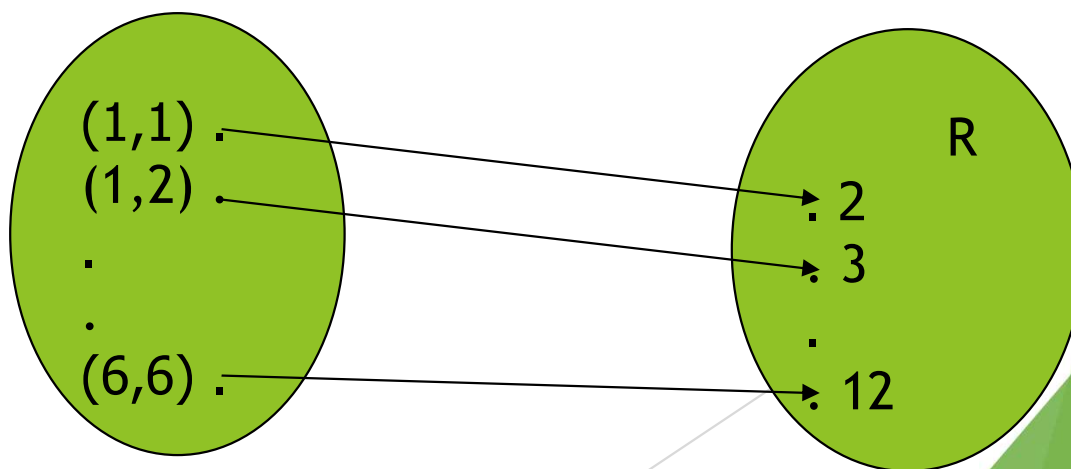
Sehingga $P(X=1)$ artinya Probabilitas keluar Gambar dan $P(X=0)$ adalah probabilitas keluar angka.

Jika dihitung nilai probabilitasnya maka $P(X=1)=1/2$ dan $P(X=0)=1/2$

Tabel nilai distribusinya adalah sebagai berikut:

X	0	1
$P(X=x)$	$P(X=0)=1/2$	$P(X=1)=1/2$

Contoh 2: Melempar dua buah dadu seimbang dengan X adalah jumlah dua dadu, Diperoleh $S=\{(1,1),(1,2),\dots(2,1),(2,2)\dots(6,6)\}$, sebanyak 36 kejadian. Untuk $X=\{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$



EXAMPLE 4.1a Letting X denote the random variable that is defined as the sum of two fair dice, then

$$P\{X = 2\} = P\{(1, 1)\} = \frac{1}{36} \quad (4.1.1)$$

$$P\{X = 3\} = P\{(1, 2), (2, 1)\} = \frac{2}{36}$$

$$P\{X = 4\} = P\{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\} = \frac{3}{36}$$

$$P\{X = 5\} = P\{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\} = \frac{4}{36}$$

$$P\{X = 6\} = P\{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\} = \frac{5}{36}$$

$$P\{X = 7\} = P\{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\} = \frac{6}{36}$$

$$P\{X = 8\} = P\{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\} = \frac{5}{36}$$

$$P\{X = 9\} = P\{(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)\} = \frac{4}{36}$$

$$P\{X = 10\} = P\{(4, 6), (5, 5), (6, 4)\} = \frac{3}{36}$$

$$P\{X = 11\} = P\{(5, 6), (6, 5)\} = \frac{2}{36}$$

$$P\{X = 12\} = P\{(6, 6)\} = \frac{1}{36}$$

Tabel nilai probabilitasnya adalah sebagai berikut:

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=x)/f(X=x)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Misal jika diminta mencari probabilitas jumlah dadu sama dengan 3, sama dengan

$$P(X=3) = 2/36$$

Kemudian $P(X < 4) = P(X=2) + P(X=3)$ atau menggunakan sifat himpunan, yaitu $P(A) + P(A^c) = 1$

Diperoleh: $P(X < 4) = 1 - P(X \geq 4)$

Latihan :

1. Cari nilai $P(X > 7)$
2. Hitung $P(X < 11) - \{P(X < 5) + P(X=2)\}$

Jenis Variabel Random :

1. Variabel Random **Diskrit**
2. Variabel Random **Kontinyu**

Contoh Variabel random diskrit:

$$X = 2, 3, 4, 5$$
$$= 0, 1, 2, 3, \dots$$

Contoh variable Random Kontinyu:

$$X < 5; 2 < X < 7; X > 0$$

Dari jenis variable random tsb membedakan dalam perhitungan probabilitasnya:

- ▶ **Jika jenis variable random diskrit maka perhitungan probabilitasnya menggunakan Σ (sigma) dan jika variable random kontinyu menggunakan \int (integral)**

Fungsi Distribusi Kumulatif (*Cumulatif Distribution Function /CDF*)

Let X be a random variable and x be a number. As stated earlier, we can define the event $[X \leq x] = \{\omega \mid X(\omega) \leq x\}$. The distribution function (or the cumulative distribution function (CDF)) of X is defined by

$$F_X(x) = P[X \leq x] \quad -\infty < x < \infty$$

Dari contoh2 di atas :

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=x)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36
$F(x)$	1/36	3/36	6/36	10/36	15/36	21/36	26/36	30/36	33/36	35/36	36/36

Contoh : $F(5) = P(X \leq 5) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + P(X=5)$
 $= 1/36 + 2/36 + 3/36 + 4/36$
 $= 10/36$

Contoh :

Example 2.3 The CDF of the random variable X is given by

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x + \frac{1}{2} & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 & x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

(a) Draw the graph of the CDF

(b) Compute $P\left[X > \frac{1}{4}\right]$

Solution (a) The graph of the CDF is as shown in Figure 2.3.

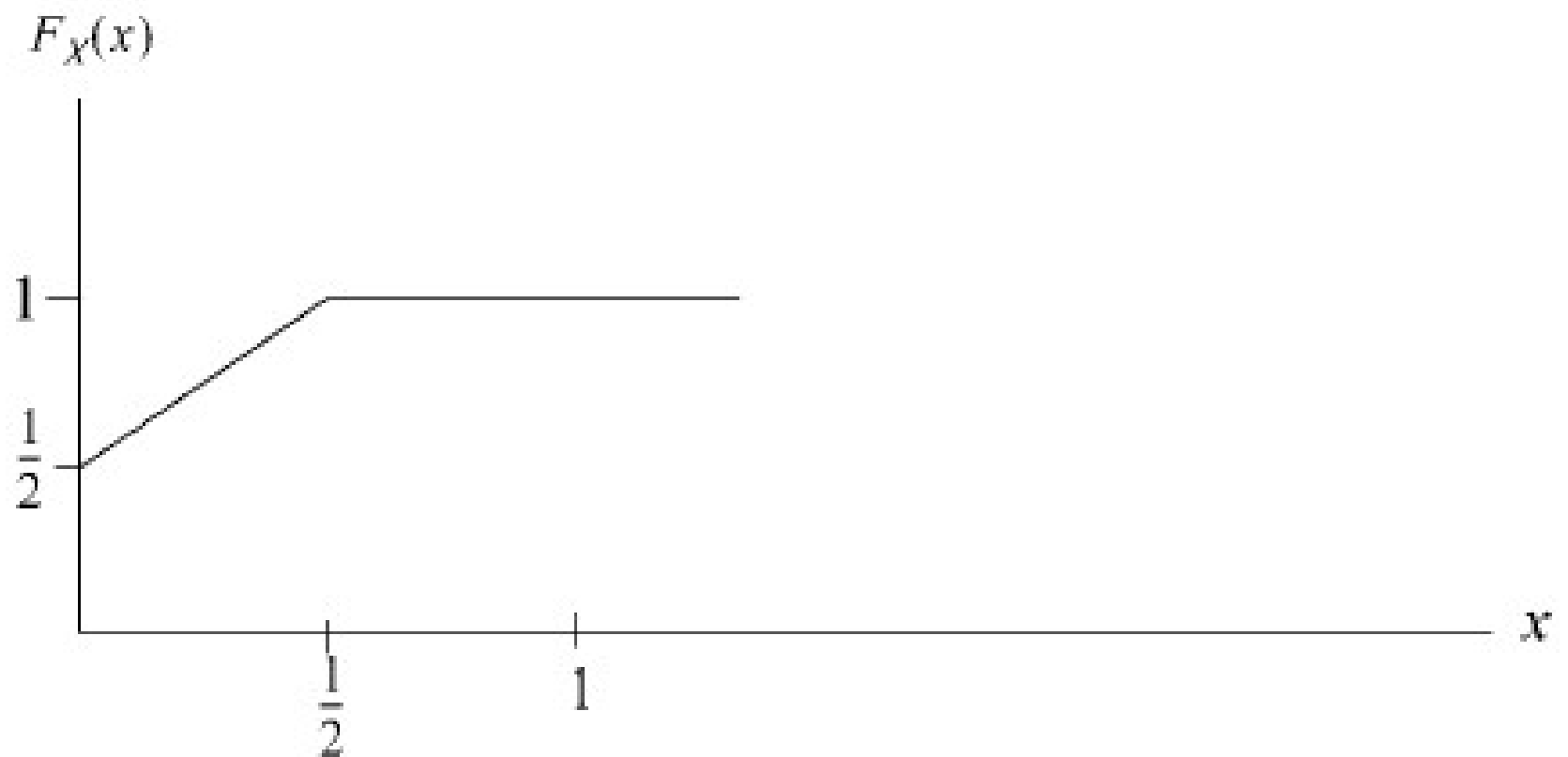


Figure 2.3 Graph of $F_X(x)$

Penyelesaian :

$$6. P[X > a] = 1 - P[X \leq a] = 1 - F_X(a)$$

(b) The probability that X is greater than $\frac{1}{4}$ is given by

$$\begin{aligned} P\left[X > \frac{1}{4}\right] &= 1 - P\left[X \leq \frac{1}{4}\right] = 1 - F_X\left(\frac{1}{4}\right) \\ &= 1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Fungsi Probabilitas/ fungsi densitas (*Probability Dencity Function/ PDF*)

Suatu fungsi biasanya disimbolkan $f(x)$ dikatakan sebagai fungsi densitas atau fungsi probabilitas ***jika hanya jika*** memenuhi :

1. $f(x)/p(x) \geq 0$
2. $\sum f(x_i) = 1$ (variable diskrit)
 $\int f(x) dx = 1$ (variable kontinyu)

contoh : variabel random diskrit

Suatu variabel random diskrit X mempunyai fungsi probabilitas berbentuk $f(x) = c(8-x)$ untuk $x=0,1,2,3,4,5$ dan 0 untuk lainnya.

- a. Cari konstan c
- b. Hitung $P(X > 2)$

► Jawab:

a) Syarat fungsi probabilitas : $\sum f(x) = 1$ (variable diskrit),
diketahui $f(x) = c(8-x)$ maka :

$$\sum_{x=0}^5 c(8-x) = c[(8-0)+(8-1)+\dots+(8-5)] = 1$$

$$c(8+7+6+5+4+3) = 1$$

$$c \cdot 33 = 1 \text{ atau } c = 1/33$$

b) $P(X > 2) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5)$

$$= 1/33 \{(8-3)+(8-4)+(8-5)\} = 1/33(5+4+3) = 12/33$$

Contoh : Variabel random kontinyu

Diberikan suatu fungsi densitas dari variable random kontinyu sbb:

$f(x) = c(1-x)x^2$ jika $0 < x < 1$ dan 0 untuk yang lain

Tentukan nilai c

Jawab: syarat fungsi densitas adalah $\int f(x) dx = 1$

Sehingga $\int_0^1 c(1-x)x^2 = c \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^1 = c \cdot 1/12 = 1$

Diperoleh $c = 12$

► Jika X variable random kontinyu maka

► $P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx$

► $P(0 < X < 1/2) = \int_0^{1/2} 12(1-x)x^2 dx =$

► $P(x > 1/2) = \int_{1/2}^{\infty} 12(1-x)x^2 dx = \int_{1/2}^1 + \int_1^{\infty}$

Latihan2:

1. Diberikan fungsi probabilitas dari variabel random X berbentuk:

$$f(x) = \frac{1}{5} (kx + 1); x = 0, 1, 2, 3 \text{ dan } 0 \text{ untuk } x \text{ yg lain, cari } k$$

2. Fungsi densitas dari variable random X berbentuk :

$$f(x) = kx ; 0 \leq x < 1$$

$$= k ; 1 \leq x \leq 2$$

$$= -kx + 3k ; 2 < x \leq 3$$

Cari nilai k dan gambar grafiknya

3. Diberikan distribusi probablitas sebagai berikut:

X	0	1	2	3	4	5
P(X)	k	3k	3k	k ²	2k ²	6k ² +k

Cari K dan hitung P(X<4), P(0<X<4)