HIMPUNAN

Himpunan (*set*)

- Himpunan (*set*) adalah kumpulan objek-objek yang *berbeda*.
- Objek di dalam himpunan disebut **elemen**, **unsur**, atau **anggota**.

Cara Penyajian Himpunan

- Enumerasi
- Simbol-simbol Baku
- Notasi Pembentuk Himpunan
- Diagram Venn

Enumerasi

Contoh

- Himpunan empat bilangan asli pertama: $A = \{1, 2, 3, 4\}$.
- Himpunan lima bilangan genap positif pertama: $B = \{4, 6, 8, 10\}$.
- $C = \{\text{kucing}, a, \text{Amir}, 10, \text{paku}\}$
- $R = \{ a, b, \{a, b, c\}, \{a, c\} \}$
- $C = \{a, \{a\}, \{\{a\}\} \}$
- $K = \{ \{\} \}$
- Himpunan 100 buah bilangan asli pertama: $\{1, 2, ..., 100 \}$
- Himpunan bilangan bulat ditulis sebagai $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.

Enumerasi

- Keanggotaan

$x \in A$: x merupakan anggota himpunan A;

$x \notin A$: x bukan merupakan anggota himpunan A.

Enumerasi

Contoh Misalkan: $A = \{1, 2, 3, 4\}$,
$R = \{ a, b, \{a, b, c\}, \{a, c\} \}$
$K = \{\{\}\}$

maka

$3 \in A$

$5 \notin B$

$\{a, b, c\} \in R$

$c \notin R$

$\{\} \in K$

$\{\} \notin R$

Enumerasi

Contoh

Bila $P1 = \{a, b\}$, $P2 = \{ \{a, b\} \}$, $P3 = \{\{\{a, b\}\}\}$

maka

$a \in P1$

$a \notin P2$

$P1 \in P2$

$P1 \notin P3$

$P2 \in P3$

Simbol-simbol Baku

P = himpunan bilangan bulat positif = { 1, 2, 3, ...}

N = himpunan bilangan alami (natural) = { 1, 2, ...}

Z = himpunan bilangan bulat ={...,-2, -1, 0, 1, 2,...}

Q = himpunan bilangan rasional

R = himpunan bilangan riil

C = himpunan bilangan kompleks

Simbol-simbol Baku

- Himpunan yang universal: **semesta**, disimbolkan dengan U.

- Contoh: Misalkan U = {1, 2, 3, 4, 5} dan *A* adalah himpunan bagian dari U, dengan *A* = {1, 3, 5}.

Notasi Pembentuk Himpunan

Notasi: { *x* | syarat yang harus dipenuhi oleh *x* }

Contoh

(i) *A* adalah himpunan bilangan bulat positif yang kecil dari 5

$A = \{ x \mid x$ adalah bilangan bulat positif lebih kecil dari 5$\}$

atau

$A = \{ x \mid x \in P, x < 5 \}$

yang ekivalen dengan $A = \{1, 2, 3, 4\}$

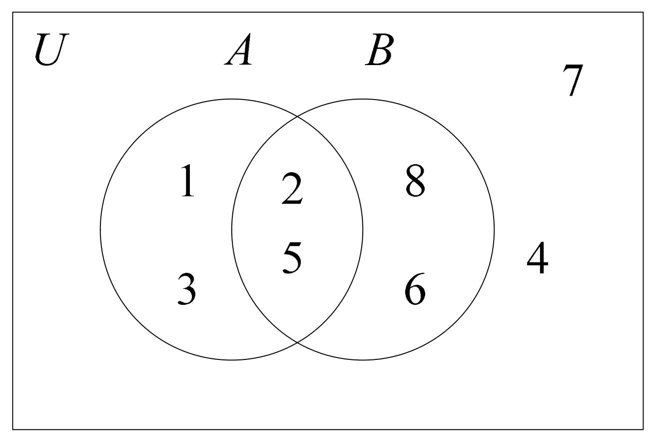
(ii) $M = \{ x \mid x$ adalah mahasiswa yang mengambil kuliah MA 2333$\}$

Diagram Venn

Contoh

Misalkan U = {1, 2, …, 7, 8}, A = {1, 2, 3, 5} dan B = {2, 5, 6, 8}.

Diagram Venn:



Kardinalitas

Jumlah elemen di dalam A disebut kardinal dari himpunan A.
Notasi: $n(A)$ atau $|A|$

Contoh

(i) $B = \{ x \mid x$ merupakan bilangan prima yang lebih kecil dari 20 $\}$,
atau $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$ maka $|B| = 8$

(ii) T = {kucing, a, Amir, 10, paku}, maka $|T| = 5$

(iii) $A = \{a, \{a\}, \{\{a\}\} \}$, maka $|A| = 3$

Himpunan Kosong

Himpunan dengan kardinal = 0 disebut himpunan kosong (*null set*).

Notasi : $\varnothing$ atau {}

Contoh

(i) $E = \{ x \mid x < x \}$, maka $n(E) = 0$

(ii) P = { orang Indonesia yang pernah ke bulan }, maka $n(P) = 0$

(iii) $A = \{x \mid x$ adalah akar persamaan kuadrat $x2 + 1 = 0$ }, $n(A)=0$

Himpunan Kosong

- himpunan {{ }} dapat juga ditulis sebagai {∅}
- himpunan {{ }, {{ }}} dapat juga ditulis sebagai {∅, {∅}}
- {∅} bukan himpunan kosong karena ia memuat satu elemen yaitu himpunan kosong.

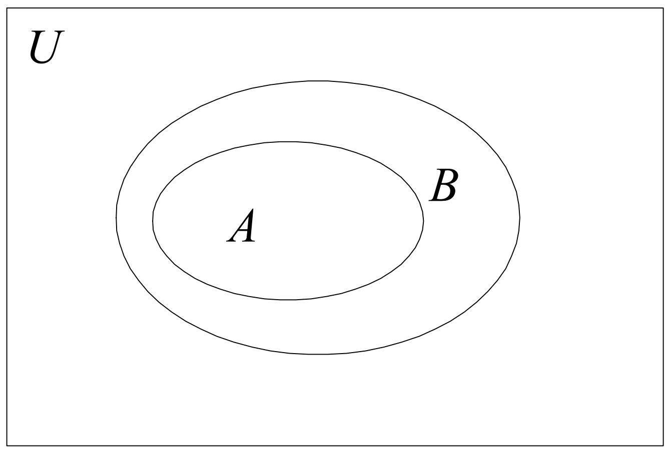
Himpunan Bagian (*Subset*)

Himpunan *A* dikatakan himpunan bagian dari himpunan *B* jika dan hanya jika setiap elemen *A* merupakan elemen dari *B*.

Dalam hal ini, *B* dikatakan *superset* dari *A*.

Notasi: $A \subseteq B$

Diagram Venn:



Himpunan Bagian (*Subset*)

Contoh

(i) $\{ 1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$

(ii) $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\}$

(iii) $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{R} \subseteq \mathbf{C}$

(iv) Jika $A = \{ (x, y) \mid x + y < 4, x \geq, y \geq 0 \}$ dan

$B = \{ (x, y) \mid 2x + y < 4, \ x \geq 0$ dan $y \geq 0 \}$,

maka $B \subseteq A$.

Himpunan Bagian (*Subset*)

TEOREMA 1. Untuk sembarang himpunan A berlaku hal-hal sebagai berikut:

(a) A adalah himpunan bagian dari A itu sendiri (yaitu, $A \subseteq A$).

(b) Himpunan kosong merupakan himpunan bagian dari A ($\emptyset \subseteq A$).

(c) Jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq C$, maka $A \subseteq C$

Himpunan Bagian (*Subset*)

$\varnothing \subseteq A$ dan $A \subseteq A$, maka dan A disebut himpunan bagian tak sebenarnya (*improper subset*) dari himpunan A.

Contoh: $A = \{1, 2, 3\}$, maka $\{1, 2, 3\}$ dan $\varnothing$ adalah *improper subset* dari A.

Himpunan Bagian (*Subset*)

$A \subseteq B$ berbeda dengan $A \subset B$

$A \subset B$: A adalah himpunan bagian dari B tetapi $A \neq B$.

A adalah himpunan bagian sebenarnya (*proper subset*) dari B.

Contoh:

(i) {1} dan {2, 3} adalah *proper subset* dari {1, 2, 3}

(ii) $A \subseteq B$: digunakan untuk menyatakan bahwa A adalah himpunan bagian (*subset*) dari B yang memungkinkan $A = B$.

Himpunan yang Sama

$A = B$ jika dan hanya jika setiap elemen A merupakan elemen B dan sebaliknya setiap elemen B merupakan elemen A.

$A = B$ jika A adalah himpunan bagian dari B dan B adalah himpunan bagian dari A.
Jika tidak demikian, maka $A \neq B$.

Notasi : $A = B \leftrightarrow A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$

Himpunan yang Sama

Contoh

(i) Jika $A = \{ 0, 1 \}$ dan $B = \{ x \mid x (x - 1) = 0 \}$, maka $A = B$

(ii) Jika $A = \{ 3, 5, 8, 5 \}$ dan $B = \{5, 3, 8 \}$, maka $A = B$

(iii) Jika $A = \{ 3, 5, 8, 5 \}$ dan $B = \{3, 8\}$, maka $A \neq B$

Untuk tiga buah himpunan, A, B, dan C berlaku aksioma berikut:

(a) $A = A$, $B = B$, dan $C = C$

(b) jika $A = B$, maka $B = A$

(c) jika $A = B$ dan $B = C$, maka $A = C$

Himpunan yang Ekivalen

Himpunan A dikatakan ekivalen dengan himpunan B jika dan hanya jika kardinal dari kedua himpunan tersebut sama.

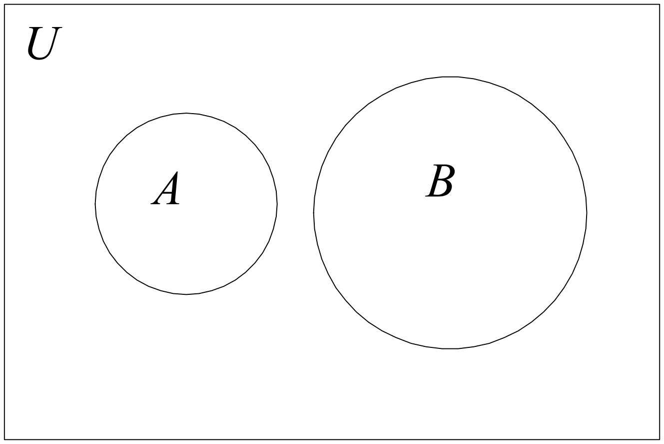
Notasi : $A \sim B \leftrightarrow |A| = |B|$

Contoh

Misalkan $A = \{ 1, 3, 5, 7 \}$ dan $B = \{ a, b, c, d \}$,
maka $A \sim B$ sebab $|A| = |B| = 4$

Himpunan Saling Lepas

- Dua himpunan A dan B dikatakan saling lepas (*disjoint*) jika keduanya tidak memiliki elemen yang sama.
- Notasi : $A // B$
- Diagram Venn:



- **Contoh 11.**
- Jika $A = \{ x \mid x \in P, x < 8 \}$ dan $B = \{ 10, 20, 30, ... \}$, maka $A // B$.

Himpunan Kuasa

Himpunan kuasa (*power set*) dari himpunan A adalah suatu himpunan yang elemennya merupakan semua himpunan bagian dari A, termasuk himpunan kosong dan himpunan A sendiri.

Notasi : $P(A)$ atau 2^A

Jika $|A| = m$, maka $|P(A)| = 2^m$.

Himpunan Kuasa

Contoh

Jika $A = \{ 1, 2 \}$, maka $P(A) = \{\emptyset , \{ 1 \}, \{ 2 \}, \{ 1, 2 \}\}$

Contoh

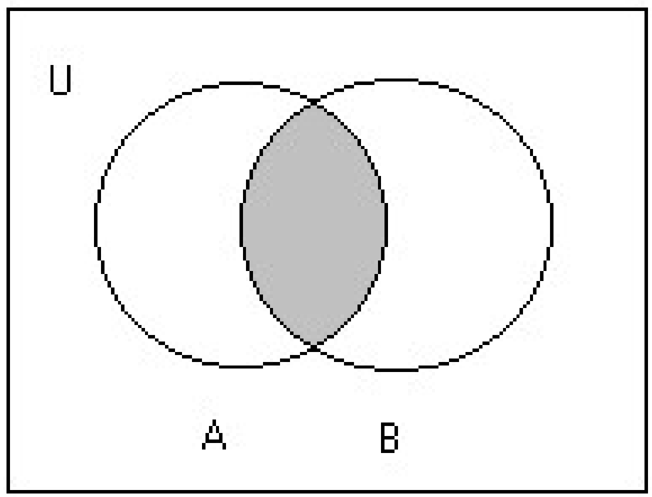
Himpunan kuasa dari himpunan kosong adalah $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$, dan himpunan kuasa dari himpunan $\{\emptyset\}$ adalah $P(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Operasi Terhadap Himpunan

a. Irisan (*intersection*)
b. Gabungan (*union*)
c. Komplemen (*complement*)
d. Selisih (*difference*)
e. Beda Setangkup (*Symmetric Difference*)
f. Perkalian Kartesian (*cartesian product*)

Irisan (*intersection*)

Notasi : $A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ dan } x \in B \}$



Irisan (*intersection*)

Contoh

(i)Jika $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ dan $B = \{4, 10, 14, 18\}$,

maka $A \cap B = \{4, 10\}$

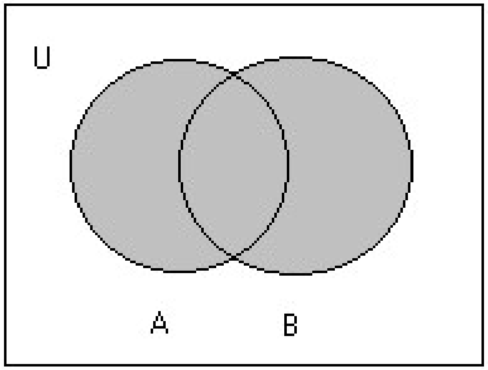
(ii) Jika $A = \{ 3, 5, 9 \}$ dan $B = \{ -2, 6 \}$, maka

$A \cap B = \varnothing$.

Artinya: A // B

Gabungan (*union*)

Notasi : $A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ atau } x \in B \}$



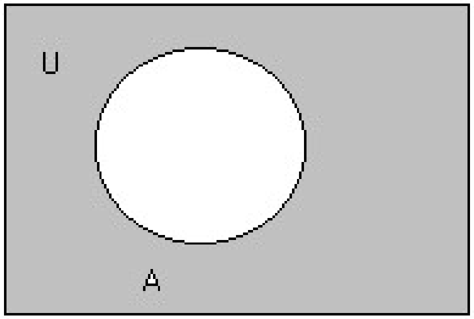
Contoh

(i) Jika $A = \{ 2, 5, 8 \}$ dan $B = \{ 7, 5, 22 \}$, maka $A \cup B = \{ 2, 5, 7, 8, 22 \}$

(ii) $A \cup \varnothing = A$

Komplemen (*complement*)

Notasi : $= \{ x \mid x \in U, x \notin A \}$



Contoh

Misalkan U = { 1, 2, 3, ..., 9 },

jika $A = \{1, 3, 7, 9\}$, maka $\overline{A} = \{2, 4, 6, 8\}$

jika $A = \{ x \mid x/2 \in P, x < 9 \}$, maka

$\overline{A} = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$

Komplemen (*complement*)

Contoh

Misalkan:

A = himpunan semua mobil buatan dalam negeri
B = himpunan semua mobil impor
C = himpunan semua mobil yang dibuat sebelum tahun 1990
D = himpunan semua mobil yang nilai jualnya kurang dari Rp 100 juta
E = himpunan semua mobil milik mahasiswa universitas tertentu

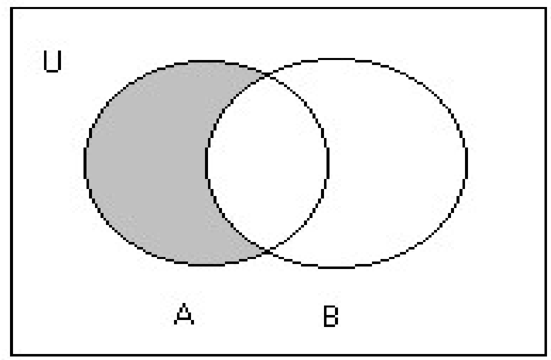
"mobil mahasiswa di universitas ini produksi dalam negeri atau diimpor dari luar negeri" → $(E \cap A) \cup (E \cap B)$ atau $E \cap (A \cup B)$

"semua mobil produksi dalam negeri yang dibuat sebelum tahun 1990 yang nilai jualnya kurang dari Rp 100 juta" → $A \cap C \cap D$

"semua mobil impor buatan setelah tahun 1990 mempunyai nilai jual lebih dari Rp 100 juta" → $\overline{C} \cap \overline{D} \cap B$

Selisih (*difference*)

Notasi : $A - B = \{ x \mid x \in A \text{ dan } x \notin B \} = A \cap \overline{B}$



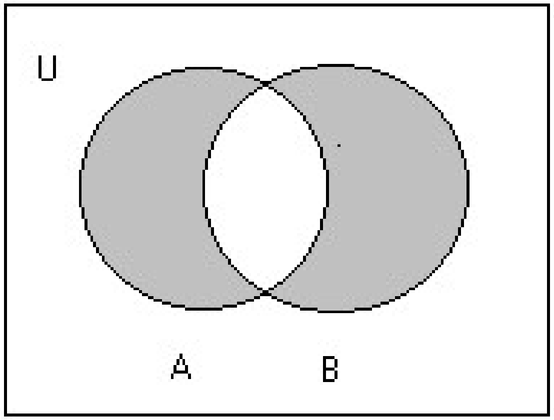
Contoh

(i) Jika $A = \{ 1, 2, 3, ..., 10 \}$ dan $B = \{ 2, 4, 6, 8, 10 \}$, maka $A - B = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$ dan $B - A = \varnothing$

(ii) $\{1, 3, 5\} - \{1, 2, 3\} = \{5\}$, tetapi $\{1, 2, 3\} - \{1, 3, 5\} = \{2\}$

Beda Setangkup (*Symmetric Difference*)

Notasi: $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$



Contoh

Jika $A = \{ 2, 4, 6 \}$ dan $B = \{ 2, 3, 5 \}$, maka $A \oplus B = \{ 3, 4, 5, 6 \}$

Beda Setangkup (*Symmetric Difference*)

Contoh

Misalkan

U = himpunan mahasiswa

P = himpunan mahasiswa yang nilai ujian UTS di atas 80

Q = himpunan mahasiswa yang nilain ujian UAS di atas 80

Seorang mahasiswa mendapat nilai A jika nilai UTS dan nilai UAS keduanya di atas 80, mendapat nilai B jika salah satu ujian di atas 80, dan mendapat nilai C jika kedua ujian di bawah 80.

"Semua mahasiswa yang mendapat nilai A" : $P \cap Q$

"Semua mahasiswa yang mendapat nilai B" : $P \oplus Q$

"Semua mahasiswa yang mendapat nilai C" : $U - (P \cup Q)$

Beda Setangkup (*Symmetric Difference*)

TEOREMA: Beda setangkup memenuhi sifat-sifat berikut:

(a) $A \oplus B = B \oplus A$ (hukum komutatif)

(b) $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$ (hukum asosiatif)

CARTESIAN PRODUCT
(PERKALIAN KARTESIAN)

- Notasi: $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ dan } b \in B\}$

- **Contoh**

(i) Misalkan $C = \{ 1, 2, 3 \}$, dan $D = \{ a, b \}$, maka
$C \times D = \{ (1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b) \}$

(ii) Misalkan $A = B$ = himpunan semua bilangan riil, maka
$A \times B$ = himpunan semua titik di bidang datar

CARTESIAN PRODUCT
(PERKALIAN KARTESIAN)

- Jika A dan B merupakan himpunan berhingga, maka: $|A \times B| = |A| \, . \, |B|$.
- Pasangan berurutan (a, b) berbeda dengan (b, a), dengan kata lain $(a, b) \neq (b, a)$.
- Perkalian kartesian tidak komutatif, yaitu $A \times B \neq B \times A$ dengan syarat A atau B tidak kosong.
- Jika $A = \varnothing$ atau $B = \varnothing$, maka $A \times B = B \times A = \varnothing$

CARTESIAN PRODUCT
(PERKALIAN KARTESIAN)

Contoh : Misalkan

A = himpunan makanan = { s = soto, g = gado-gado, n = nasi goreng, m = mie rebus }

B = himpunan minuman = { c = coca-cola, t = teh, d = es dawet }

Berapa banyak kombinasi makanan dan minuman yang dapat disusun dari kedua himpunan di atas?

Jawab: 4 x 3 = 12

yaitu $\{(s, c), (s, t), (s, d), (g, c), (g, t), (g, d), (n, c), (n, t), (n, d), (m, c), (m, t), (m, d)\}$.

CARTESIAN PRODUCT

(PERKALIAN KARTESIAN)

Contoh : Daftarkan semua anggota himpunan berikut:

(a) $P(\varnothing)$ (b) $\varnothing \times P(\varnothing)$ (c) $\{\varnothing\} \times P(\varnothing)$ (d) $P(P(\{3\}))$

- Penyelesaian:

(a) $P(\varnothing) = \{\varnothing\}$

(b) $\varnothing \times P(\varnothing) = \varnothing$

(ket: jika $A = \varnothing$ atau $B = \varnothing$ maka $A \times B = \varnothing$)

(c) $\{\varnothing\} \times P(\varnothing) = \{\varnothing\} \times \{\varnothing\} = \{(\varnothing,\varnothing))$

(d) $P(P(\{3\})) = P(\{ \varnothing, \{3\} \}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{3\}\}, \{\varnothing, \{3\}\} \}$

Perampatan Operasi Himpunan

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \mathop{\times}_{i=1}^{n} A_i$$

$$A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_n = \bigoplus_{i=1}^{n} A_i$$

Perampatan Operasi Himpunan

- **Contoh**

$A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n) = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \ldots \cup (A \cap B_n)$

$$A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i)$$

Hukum-hukum Himpunan

- Hukum identitas:
  - $A \cup \varnothing = A$
  - $A \cap U = A$
- Hukum *null*/dominasi:
  - $A \cap \varnothing = \varnothing$
  - $A \cup U = \mathrm{U}$
- Hukum komplemen:
  - $A \cup \bar{A} = U$
  - $A \cap \bar{A} = \varnothing$

Hukum-hukum Himpunan

- *Hukum idempoten:*
  - $A \cap A = A$
  - $A \cup A = A$
- *Hukum involusi:*
  - $\overline{(\overline{A})} = A$
- *Hukum penyerapan (absorpsi):*
  - $A \cup (A \cap B) = A$
  - $A \cap (A \cup B) = A$

Hukum-hukum Himpunan

- Hukum komutatif:
  - $A \cup B = B \cup A$
  - $A \cap B = B \cap A$
- *Hukum asosiatif:*
  - $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
  - $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Hukum-hukum Himpunan

- Hukum distributif:
  - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
  - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- Hukum De Morgan:
  - $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
  - $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Hukum-hukum Himpunan

- Hukum 0/1
  - $\overline{\varnothing} = U$
  - $\overline{U} = \varnothing$

Prinsip Dualitas

Prinsip dualitas: dua konsep yang berbeda dapat dipertukarkan namun tetap memberikan jawaban yang benar.

Prinsip Dualitas

Contoh: AS → kemudi mobil di kiri depan
Indonesia) → kemudi mobil di kanan depan
Peraturan:
(a) di Amerika Serikat,
mobil harus berjalan di bagian *kanan* jalan,
pada jalan yang berlajur banyak, lajur *kiri* untuk mendahului,
bila lampu merah menyala, mobil belok *kanan* boleh langsung
(b) di Inggris,
mobil harus berjalan di bagian *kiri* jalan,
pada jalur yang berlajur banyak, lajur *kanan* untuk mendahului,
bila lampu merah menyala, mobil belok *kiri* boleh langsung

- **Prinsip dualitas**:
  Konsep kiri dan kanan dapat dipertukarkan pada kedua negara tersebut sehingga peraturan yang berlaku di Amerika Serikat menjadi berlaku pula di Indonesia.

Prinsip Dualitas pada Himpunan

Misalkan S adalah suatu kesamaan (*identity*) yang melibatkan himpunan dan operasi-operasi seperti $\cup$, $\cap$, dan komplemen. Jika S^* diperoleh dari S dengan mengganti $\cup \rightarrow \cap$, $\cap \rightarrow \cup$, $\varnothing \rightarrow U$, $U \rightarrow \varnothing$, sedangkan komplemen dibiarkan seperti semula, maka kesamaan S^* juga benar dan disebut dual dari kesamaan S.

Prinsip Inklusi-Eksklusi

- Untuk dua himpunan A dan *B*:
  - $\left| A \cup B \right| = \left| A \right| + \left| B \right| - \left| A \cap B \right|$
  - $\left| A \oplus B \right| = \left| A \right| + \left| B \right| - 2 \left| A \cap B \right|$

- Untuk tiga buah himpunan *A*, *B*, dan *C*, berlaku
  - $\left| A \cup B \cup C \right| = \left| A \right| + \left| B \right| + \left| C \right| - \left| A \cap B \right| - \left| A \cap C \right| - \left| B \cap C \right| + \left| A \cap B \cap C \right|$

Prinsip Inklusi-Eksklusi

- **Contoh:** Berapa banyaknya bilangan bulat antara 1 dan 100 yang habis dibagi 3 atau 5?

  Penyelesaian: $|A| = \lfloor 100/3 \rfloor = 33$,

  $|B| = \lfloor 100/5 \rfloor = 20$,

  $|A \cap B| = \lfloor 100/15 \rfloor = 6$

  $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 33 + 20 - 6 = 47$

  Jadi, ada 47 buah bilangan yang habis dibagi 3 atau 5.

Partisi

Partisi dari sebuah himpunan A adalah sekumpulan himpunan bagian tidak kosong $A1$, $A2$, … dari A sedemikian sehingga:

- $A1 \cup A2 \cup \ldots = A$, dan
- $Ai \cap Aj = \varnothing$ untuk $i \neq j$

- **Contoh :** Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, maka $\{ \{1\}, \{2, 3, 4\}, \{7, 8\}, \{5, 6\} \}$ adalah partisi A.

Himpunan Ganda

- Himpunan yang elemennya boleh berulang (tidak harus berbeda) disebut **himpunan ganda** (*multiset*).

  misal : {1, 1, 1, 2, 2, 3}, {2, 2, 2}, {2, 3, 4}, {}.
- **Multiplisitas** dari suatu elemen pada himpunan ganda adalah jumlah kemunculan elemen tersebut pada himpunan ganda. Contoh: M = { 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1 }, multiplisitas 0 adalah 4.

Himpunan Ganda

- Himpunan (*set*) merupakan contoh khusus dari suatu *multiset*, yang dalam hal ini multiplisitas dari setiap elemennya adalah 0 atau 1.
- Kardinalitas dari suatu *multiset* didefinisikan sebagai kardinalitas himpunan padanannya (ekivalen), dengan mengasumsikan elemen-elemen di dalam *multiset* semua berbeda.

Operasi Antara Dua Buah *Multiset*

Misalkan P dan Q adalah *multiset*:

- P U Q adalah suatu *multiset* yang multiplisitas elemennya sama dengan multiplisitas maksimum elemen tersebut pada himpunan P dan Q.

  Contoh: $P = \{ a, a, a, c, d, d \}$ dan $Q =\{ a, a, b, c, c \}$,

  $P \cup Q = \{ a, a, a, b, c, c, d, d \}$

- $P \cap Q$ adalah suatu *multiset* yang multiplisitas elemennya sama dengan multiplisitas minimum elemen tersebut pada himpunan P dan Q.

  Contoh: $P = \{ a, a, a, c, d, d \}$ dan $Q = \{ a, a, b, c, c \}$

  $P \cap Q = \{ a, a, c \}$

Operasi Antara Dua Buah *Multiset*

- P – *Q* adalah suatu *multiset* yang multiplisitas elemennya sama dengan
  - multiplisitas elemen tersebut pada *P* dikurangi multiplisitasnya pada *Q*, jika selisihnya positif
  - 0 jika selisihnya nol atau negatif.

Contoh: $P = \{ a, a, a, b, b, c, d, d, e \}$ dan $Q = \{ a, a, b, b, b, c, c, d, d, f \}$ maka $P - Q = \{ a, e \}$

Operasi Antara Dua Buah *Multiset*

- $P + Q$, yang didefinisikan sebagai jumlah (*sum*) dua buah himpunan ganda, adalah suatu *multiset* yang multiplisitas elemennya sama dengan penjumlahan dari multiplisitas elemen tersebut pada P dan Q.

Contoh: $P = \{ a, a, b, c, c \}$ dan $Q = \{ a, b, b, d \}$,

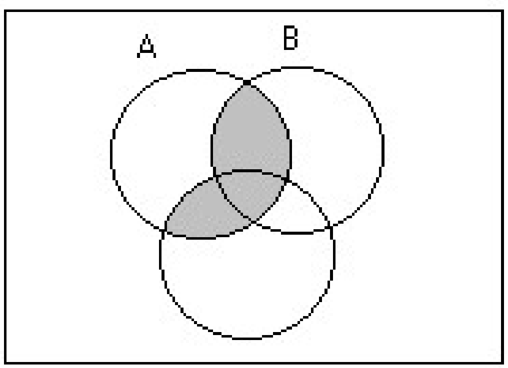
$$P + Q = \{ a, a, a, b, b, b, c, c, d \}$$

Pembuktian Pernyataan Perihal Himpunan

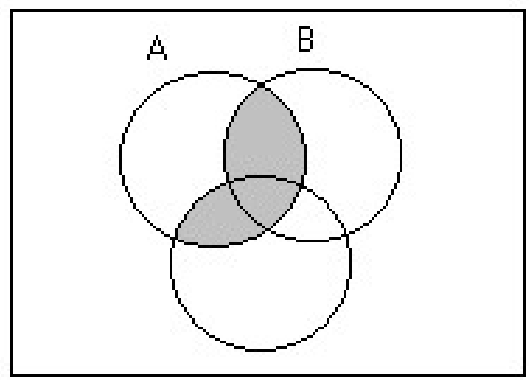
- **Pembuktian dengan menggunakan diagram Venn**

  Contoh Misalkan A, B, dan C adalah himpunan. Buktikan $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ dengan diagram Venn.

  Bukti:



$A \cap (B \cup C)$



$(A \cap B) \cup (A \cap C)$

Pembuktian Pernyataan Perihal Himpunan

- **Pembuktikan dengan menggunakan tabel keanggotaan**

- **Contoh:** Misalkan A, B, dan C adalah himpunan. Buktikan bahwa $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Pembuktian Pernyataan Perihal Himpunan

A	B	C	$B \cup C$	$A \cap (B \cup C)$	$A \cap B$	$A \cap C$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Pembuktian Pernyataan Perihal Himpunan

- **Pembuktian dengan menggunakan aljabar himpunan.**

  Misalkan A dan B himpunan.

  Buktikan bahwa $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$

- *Bukti*:

  $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A \cap (B \cup \overline{B})$ (Hukum distributif)

  $= A \cap U$ (Hukum komplemen)

  $= A$ (Hukum identitas)

Pembuktian Pernyataan Perihal Himpunan

Pembuktian dengan menggunakan definisi

- Metode ini digunakan untuk membuktikan pernyataan himpunan yang tidak berbentuk kesamaan, tetapi pernyataan yang berbentuk implikasi. Biasanya di dalam implikasi tersebut terdapat notasi himpunan bagian ($\subseteq$ atau $\subset$).

Pembuktian Pernyataan Perihal Himpunan

Contoh : Misalkan A dan B himpunan. Jika $A \cap B = \varnothing$ dan $A \subseteq (B \cup C)$ maka $A \subseteq C$. Buktikan!

Bukti:

Dari definisi himpunan bagian, $P \subseteq Q$ jika dan hanya jika setiap $x \in P$ juga $\in Q$. Misalkan $x \in A$. Karena $A \subseteq (B \cup C)$, maka dari definisi himpunan bagian, x juga $\in (B \cup C)$.

Dari definisi operasi gabungan ($\cup$), $x \in (B \cup C)$ berarti $x \in B$ atau $x \in C$.

Karena $x \in A$ dan $A \cap B = \varnothing$, maka $x \notin B$

Dari (i) dan (ii), $x \in C$ harus benar. Karena $\forall x \in A$ juga berlaku $x \in C$, maka dapat disimpulkan $A \subseteq C$.

Himpunan Fuzzy

Himpunan Fuzzy

- Dalam teori himpunan klasik, sebuah himpunan harus didefinisikan dengan jelas (well-defined).
- Dalam teori himpunan fuzzy, batasan-batasan yang ada dalam suatu himpunan fuzzy lebih bersifat samar.

Himpunan Fuzzy

$$A = \left\{ x \in \mathrm{Z} \middle| x \text{ kurang dari } 10 \right\}$$

A ={ 1, 2, 3, ….,9}

$$B = \left\{ x \in \mathrm{Z} \middle| x \text{ bilangan yang cukup besar} \right\}$$

Himpunan Fuzzy

- Jika property bersifat samar (fuzzy), maka setiap anggota U mempunyai bobot keanggotaan.
- Bobot keanggotaan menyatakan seberapa benar anggota U tersebut memenuhi properti. Dalam penyajian enumerasi, setiap anggota U diberi bobot keanggotaan himpunan tersebut. Biasanya yang bobotnya 0 tidak didaftar, kecuali untuk keperluan tertentu.
- Bobot biasanya merupakan bilangan dalam interval [0, 1].

Himpunan Fuzzy

- Misal didefinisikan sebuah himpunan :

$$A = \{x \in \mathrm{Z} \mid x \text{ bilangan yang cukup besar}\}$$

- Pengertian bilangan cukup besar di sini sangat relatif. Misal bilangan 10.000, sejauh mana orang secara umum bisa mengatakan bahwa bilangan 1000 ini termasuk bilangan yang cukup besar? Untuk itu diperlukan bobot yang merepresentasikan sejauh mana bilangan 10.000 ini bisa dikatakan cukup besar. Jika kita mendefinisikan bobot keanggotaan bilangan 10.000 sebesar 0,3, maka kita juga bisa mendefinisikan bobot bilangan-bilangan asli yang lain.

Himpunan Fuzzy

- Misal kita berikan bobot untuk beberapa bilangan asli sebagai berikut :

$x = 10^2 \longrightarrow$ bobot 0

$x = 10^4 \longrightarrow$ bobot 0,3

$x = 10^5 \longrightarrow$ bobot 0,35

$x = 10^{50} \longrightarrow$ bobot 1

Himpunan Fuzzy

Biasanya himpunan fuzzy dinyatakan dengan fungsi keanggotaan

Contoh :

Himpunan merek-merek mobil yang mahal didefinisikan sebagai berikut :

U = merek-merek mobil

M = himpunan mobil mahal

$\mu_M(u)$ = {(1/mercedes),(1/BMW),(0,8/Audi),(0,6/Toyota),(0,3/daihatsu)}

Himpunan Fuzzy

Contoh

Misal kita ingin mendefinisikan himpunan bilangan asli yang mendekati bilangan 6. Maka kita dapat mendefinisikan himpunan tersebut sebagai berikut :

U = himpunan bilangan asli

F = himpunan bilangan asli yang mendekati 6

$\mu_F(u)$ = {(0,1/3), (0,3/4), (0,6/5), (1,0/ 6), (0,6/7), (0,3/8), (0,1/9)}

Himpunan Fuzzy

Contoh

Misal U adalah bilangan-bilangan integer antara 1 sampai dengan 10, yaitu U= {1,2,…10}, maka himpunan fuzzy "beberapa" dapat didefinisikan sebagai

U= {1,2,…10}

B = beberapa

$\mu_B(u)$ = {(0,5/3) ,(0,8/4),(1/5),(1/6), (0,8/7), (0,5/8)}

Hal ini berarti 5 dan 6 mempunyai derajat 1, sedangkan 4 dan 7 dengan derajat 0,8 dan 3, 8 dengan derajat 0,5. Sedangkan yang mempunyai derajat 0 adalah 1,2,9.

Himpunan Fuzzy

Contoh

Kita juga dapat mendefinisikan himpunan untuk beberapa kategori usia manusia, seperti tua dan remaja dengan fungsi keanggotaan :

X = usia

Himpunan Fuzzy

- Tua

$$\mu_{Tua}(x) = \begin{cases} 1, & x > 80 \\ \dfrac{x-20}{60}, & 20 \le x \le 80 \\ 0, & x < 20 \end{cases}$$

- Remaja

$$\mu_{\text{Remaja}}(x) = \begin{cases} 1, & 10 \le x \le 16 \\ 0, & x \le 6 \quad \text{atau} \quad x \ge 30 \\ \dfrac{x-6}{3}, & 7 < x < 10 \\ \dfrac{30-x}{14}, & 16 < x < 30 \end{cases}$$